Megmutatjuk, hogy a szóban forgó szakaszos tizedes törtek racionális számok, vagyis van olyan A, B pozitív egész számpár, hogy pl.

$$0,\ ab = \frac{A}{B}. \tag{1}$$

Kövessük az $A : B$ hányados első néhány jegyének megállapítását. $A < B$, különben a hányados egész része nem lehetne O. A következő a jegyet a $10A : B$ hányados egész része adja, és itt fellép egy a B-nél kisebb pozitív R maradék, különben a hányados nem lenne végtelen tizedes tört:

$$10A = aB + R, \qquad 0 < R < B, \qquad \text{továbbá}\ \ a < 10. \tag{2}$$

A következő lépésben a $10R : B$ hányados egész része b, és a maradék ismét R. A végtelen tizedes tört b számjegyeinek vég nélküli ismétlődése ugyanis a rész–osztandó megismétlődésének a következménye, az utóbbi pedig csak akkor egyenlő a megelőző rész–osztandóval, ha a rész–maradék is egyenlő a megelőzővel. Így (2) figyelembevételével

$$\begin{aligned} 10R = bR + R, \qquad\qquad 9R &= 9(10A - aB) = bB, \\ 90A &= (9a + b)B, \\ \frac{A}{B} &= \frac{9a + b}{90}, \end{aligned} \tag{3}$$

állításunknak megfelelően, ugyanis $9a+b$ egész szám. Nem lehet sem $b = 9$, sem $b = 0$, mert így (3)-ból $R = B$, ill. $R = 0$ adódik, ellentétben (2)-vel, és a hányados véges tizedes tört: $(a+1)/10$, ill. $a/10$. – Ugyanígy $0,\ cddd\ldots = (9c+d)/90$.

Ezek szerint az a, b, c, d számjegyeket az alábbiak szerint kell meghatároznunk:

$$\begin{aligned} \cos\ a &= \frac{9a + b}{90}, \\ \cos\ 2a &= 2\ cos^2 a - 1 = \frac{(9a + b)^2}{45 \cdot 90} - 1 = -\frac{9c + d}{90}, \\ (9a + b)^2 &= 45 \cdot 90 - 45(9c + d) = 3^2 \cdot 5(90 - 9c - d). \end{aligned} \tag{4}$$

Az átrendezett alak szerint a jobb oldal teljes négyzet, és ez áll a 3^2 tényező elhagyása után maradó szorzatra is. Az 5 törzsszám, ezért a zárójelbeli kifejezés egy teljes négyzet 5-szöröse:

$$90 - 9c - d = 5k^2, \qquad\qquad 9c + d = 90 - 5k^2,$$

és k értéke csak 1, 2, 3, 4 lehet. Figyelembe véve a $0 \le a$, $c \le 9$, és $0 < b$, $d < 9$ követelményeket, a szóba jövő számjegynégyeseket az alábbiak szerint kapjuk:

$k = 1$, $9c + d = 85$, $c = 9$, $d = 4$, $9a + b = 15$, $a = 1$, $b = 6$;

$k = 2$, $9c + d = 70$, $c = 7$, $d = 7$; nem felel meg, mert nem különbözők;

$k = 3$, $9c + d = 45$, nem felel meg, mert d osztható 9-cel, amit kizártunk;

$k = 4$, $9c + d = 10$, $c = 1$, $d = 1$, nem különbözők.

$\dot{S}$

Mindezek szerint csak az $a = 1$, $c = 9$, $b = 6$, $d = 4$ számjegynégyes jön szóba, és ez meg is felel a feltételnek:

$$\cos\ a = 0{,}1\dot{6} = \frac{1}{6}\ \ \text{esetén}\ \ \cos\ 2a = -\frac{17}{18} = -0{,}9\dot{4}.$$

Peterdy György (Győr, Benedek–rendi Czuczor G. G. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. (4)-ből a, b-t így kapjuk: $9a + b$ többszöröse 3-nak és 5-nek, ezek relatív prímek, tehát 15-nek is; ezért $9a + b = 15\ m$, ahol m egész; másrészt a jobb oldalon a kivonandót elhagyva $(9a + b)^2 < 45 \cdot 90$, $9a + b < 64$, ennélfogva $m = 1, 2, 3\ 4$. Mármost $m = 1$-gyel $a = 1$, $b = 6$, a fenti megoldást kapjuk, a további értékek mellett $a = b$, ill. $b = 0$, vagy 9.

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. G. III. o. t.)

2. Számos dolgozat „ismert szabály”-ra hivatkozva alakította át a szakaszos tizedes törtet közönséges törtté, mások az ugyancsak többhelyütt bemutatott fogással: $\cos\ a = 0, abbb\ldots$, $10\ \cos\ a = a, bbbb\ldots$ kivonással $9\ \cos\ a = a + \dfrac{b - a}{10} = \dfrac{9a + b}{10}$. Ezek helyes eredményre vezetnek, de a középiskolában nem tisztázott úton, ugyanis nem láttuk be, hogy a véges számú jeggyel írt számokra ismert kivonási eljárásunk érvényes-e a vég nélküli tizedes törtekre.