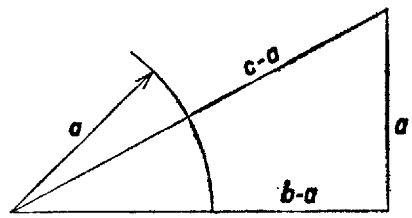
**I. megoldás.** Legyenek a háromszög oldalai $a$, $b$, $c$, úgy, hogy $a \leqq b < c$. A feltételi egyenlőséget kifejtve, majd $c^2$-nal osztva és felismerve a kisebb $\alpha$ hegyesszög függvényeit:

$$a^2 = (c-a)(b-a), \qquad \frac{b}{c} - \frac{a}{c} - \frac{ab}{c^2} = 0,$$

(1) $$\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$




Szorozzuk a bal oldalt a $(\cos\alpha - \sin\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha$ kifejezéssel. Ez a

(2) $$0^\circ \leqq \alpha \leqq 45^\circ$$

intervallumban pozitív, mert sem a különbség, sem a szorzat nem negatív, és ahol az egyikük 0, ott a másikuk pozitív. Így az adódó

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0,$$

(3) $$1 - \sin 2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha = 0$$

egyenletnek a (2) intervallumba eső gyökei az (1)-nek is gyökei. (3)-ból

$$\sin 2\alpha = -2 \pm 2\sqrt{2}, \quad \text{és} \quad \sin 2\alpha = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8284,$$

ezért $2\alpha \leqq 90^\circ$ miatt az egyetlen megfelelő megoldás $2\alpha \approx 55{,}92^\circ$, $\alpha \approx 27{,}96^\circ$. A másik hegyes szög ennek pótszöge. (3) negatív gyöke semmiféle szögnek nem lehet színusza.

*Ferenczi György* (Budapest, I. István g. III. o. t.)

*Megjegyzés.* (1)-ből a vele nem ekvivalens (3)-at úgy is megkapjuk, ha a szorzatot a jobb oldalra visszük át, majd négyzetre emeljük az egyenletet. Így csupán a függvénytáblázatra támaszkodva mondhatjuk ki, hogy a talált gyök (1)-nek is gyöke, vagy a négyzetre emelt egyenletet 0-ra redukálva és szorzattá alakítva a fenti megoldás gondolatmenetére térünk vissza.

**II. megoldás.** Vegyük hosszúságegységnek a nagyobb befogót és legyen a rövidebb befogó $x$, az átfogó $y$. A követelmények szerint

$$y^2 = 1 + x^2, \qquad x^2 = (y-x)(1-x), \qquad y = \frac{x}{1-x}$$

(mert nyilvánvalóan $1 - x \neq 0$), ezért $y$ kiküszöbölésével, rendezéssel

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Ez szimmetrikus egyenlet. $x^2$-tel osztva (ami nem 0), majd a második kéttagú kifejezés helyére $z$-t írva

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0,$$

$$(z^2 - 2) - 2z + 1 = 0. \quad \text{amiből} \quad z = 1 \pm \sqrt{2}.$$

A negatív gyök nyilvánvalóan nem felel meg,

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}\text{-ből pedig} \quad x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right).$$

A diszkrimináns négyzetgyökét + jellel véve $x > 1$, ami nem megfelelő; negatívnak véve $x \approx 0{,}5310$, és mivel másrészt $\operatorname{tg}\alpha = x$, azért $\alpha \approx 27{,}96^\circ$.

*Sükösd Csaba* (Budapest, József A. g. III. o. t.)