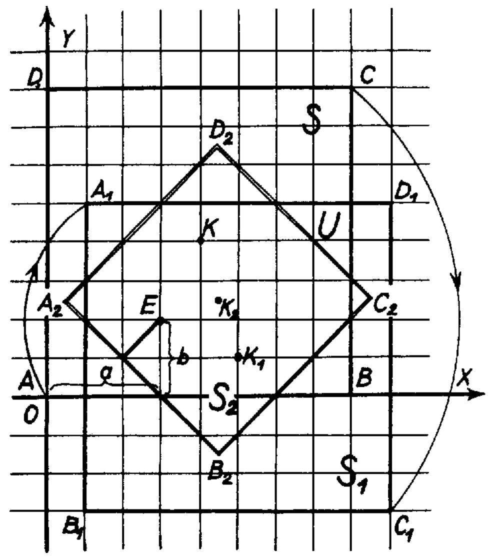
Helyezzük el az egységnyi oldalú négyzetmezőkből álló $ABCD = S$ sakktáblát a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy A, B, C csúcsa rendre az origóba, a (8; 0), ill. a (8; 8) pontba essék (1. ábra). Így hálózati pontok a sík egész x, y koordinátájú ún. rácspontjai közül azok, amelyekre

(1) $$0 \leq x \leq 8, \qquad \text{és} \qquad 0 \leq y \leq 8.$$

A követelménynek megfelelő négyzeteket hálózati négyzeteknek nevezzük.



2. ábra

Elég a kérdésre választ adnunk, ha a kiszemelt hálózati pont abban a T háromszögben vagy a kerületén van, amelynek csúcsai az origó, a (4; 0) és a $K(4; 4)$ pont. Ugyanis T-t K körül egymás után háromszor 90°-kal elforgatva, másrészt az így keletkezett 4 háromszöget az AC átlóra tükrözve a képek S-et hézagtalanul lefedik, minden hálózati pontra T egy hálózati pontja, vagy annak elforgatott képe, vagy elforgatott és tükrözött képe jut. A felsorolt szimmetriák minden hálózati négyzetet is hálózati négyzetbe visznek át, tehát minden hálózati pont ugyanannyi hálózati négyzetben lép fel csúcsként, mint a neki T-ben megfelelő hálózati pont.

Legyen T egy hálózati pontja $E(a,\, b)$, vagyis

(2) $$0 \leq b \leq a \leq 4,$$

és egy hálózati négyzet $EFGH$ (betűzés az órajárással ellentétes irányban), legyenek F koordinátái $(a+u,\, b+v)$, ahol egyidejűleg nem áll fenn $u = 0$ és $v = 0$.

H-t úgy kapjuk F-ből, hogy ezt E körül 90°-kal balra elforgatjuk. A síknak azok a rácspontjai, amelyek a mondott módon S valamelyik hálózati pontjába vihetők át, abban az S_1 négyzetben vagy a kerületén vannak, amely úgy keletkezik S-ből, hogy elforgatjuk E körül jobbra 90°-kal. Eszerint F csak az S és S_1 közös részében vagy annak kerületén lehet.

E az S egymás utáni oldalaitól rendre b, $8-a$, $8-b$, a távolságban van, ezért az S_1 négyzet A_1B_1 oldalának egyenlete $x = a - b$ (párhuzamos AD-vel), B_1C_1-é: $y = b - (8-a)$, C_1D_1-é: $x = a + 8 - b$, D_1A_1-é: $y = b + a$. S és S_1közös része az U téglalap. Alsó oldala AB-nek egy szakasza, mert S_1-nek alsó B_1C_1 oldala mélyebben van vagy egybeesik AB-vel, hiszen (2) miatt $b - 8 + a \leq 0$. Hasonlóan jobbról BC (az $x = 8$ egyenes) egy szakasza, felülről D_1A_1, balról A_1B_1 egy szakasza határolja U-t. Alapjának hossza $8-(a-b)$, – ti. BC és A_1B_1 távolsága –, magasságáé $b+a$. Az oldalakon 1-gyel több hálózati pont van, mint ahány egység a hosszuk, ezért az U-hoz tartozó és az eddigiek szerint F számára szóba jövő hálózati pontok száma

(3) $$(9-a+b)(a+b+1) - 1 = -a^2 + b^2 + 8a + 10b + 8$$

(a szorzatból 1-et levonunk, mert $F \neq E$).

G-t úgy kapjuk F-ből, hogy az EF félegyenest E körül 45°-kal balra forgatjuk és rámérjük az $EG = \sqrt{2} \cdot EF$ szakaszt. Ezen a módon S hálózati pontjai csak olyan pontokból keletkezhetnek, amelyek az S-ből $1 : \sqrt{2}$ arányú, E középpontú összehúzással és 45°-os elforgatással keletkező S_2 négyzetben vannak, azonban nem minden pont rácspont, ami hálózati pontba megy át. Ezek szerint $EFGH$ akkor és csak akkor hálózati négyzet, ha F az U és S_2 közös részében vagy annak határvonalán levő hálózati pont, és feladatunkat megoldottuk, ha (3)-ból levonjuk az S_2-be nem tartozó hálózati pontok számát.

S_2 az S_1-ből is előállítható E körüli $1/\sqrt{2}$ arányú összehúzással és balra 45°-os forgatással. Ebből könnyű belátni, hogy S_2-nek K_2 középpontja felezi a KK_1 szakaszt, ahol K_1 az S_1 középpontja. A felezőpontba esik U középpontja is, így S_2 átlói egybeesnek U szimmetriatengelyeivel, és S_2 az U-ból négy egybevágó egyenlő szárú háromszöget zár ki. Eszerint elég meghatároznunk az U-ból az A_2B_2 egyenes által lemetszett háromszögben és a kerületének S_2-höz nem tartozó részén levő hálózati pontok számát.

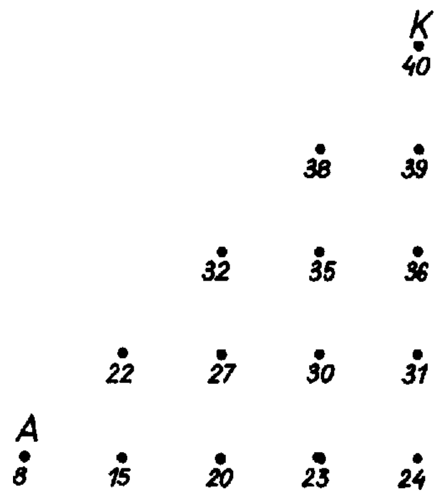
Az S_2-t előállító forgatással az egységnyi négyzet oldalából e négyzet átlójának fele lesz. Így A_2B_2 az E-től b félátlónyi távolságban van, felezi az EL szakaszt, ahol L az U-nak az AB és A_1B_1 egyenesek metszéspontjában levő csúcsa. Eszerint a lemetszett háromszög befogóinak hossza b. Így AB-be eső oldalán b olyan hálózati pont van, amely nem tartozik S_2-höz (a metszéspont már hozzátartozik), felfelé haladva az egymás utáni párhuzamos hálózati egyeneseken rendre 1-gyel kevesebb, így a 4 háromszög mondott hálózati pontjainak együttes száma

$$4[b+(b-1)+\ldots+2+1]=2b(b+1).$$

Ezt (3)-ból kivonva az F-re szóba jövő hálózati pontok, és egyszersmind az E csúcsot tartalmazó hálózati négyzetek száma

$$-a^2-b^2+8a+8=8+a(8-a)+(8-b).$$

Ebből T összes hálózati pontjaira a 2. ábrán látható számokat kapjuk.



2. ábra

Huhn András (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III.o. t.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel

Megjegyzés. A hálózati négyzetek számát a sakktábla összes hálózati pontjaira összegezve az összes hálózati négyzetek számának 4-szeresét kell kapnunk, amely szám a 846. gyakorlat[1] eredménye szerint 540. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez teljesül is. – A K-ban csúccsal bíró hálózati négyzetek 40-es létszámát már a 846. gyakorlatban is megkaptuk.

[1] K. M. L. 28 (1964) 74.