a) Az egyenletet 0-ra redukálva és tagokra bontva

$$x^3-2x^2-5x+4=0$$

alakra hozhatjuk. Ha az egyenlet gyökei α_1, α_2, α_3, akkor a bal oldal meg kell hogy egyezzék tagról tagra az

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

szorzat tagokra bontott alakjával, mert mindkét polinom legmagasabb fokú tagja x^3, így az

$$x^3-2x^2-5x+4-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-2)x^2-$$
$$-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+5)+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+4)$$

különbség egyrészt az α_1, α_2, α_3 helyeken a 0 értéket veszi fel, másrészt legfeljebb másodfokú lehet, s így legfeljebb két helyen tűnhetne el, ha nem volna a jobb oldal minden együtthatója 0. Ezért

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=-5,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-4.$$

Az első kettőt felhasználva

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=2^2-2(-5)=14.$$

b) Az itt felhasznált tények nem csak harmadfokú egyenletre vonatkoznak. Általában[1] ha egy n-ed fokú

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

polinom az $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ helyeken eltűnik, akkor átrendezhető

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

alakba, és a gyökök és együtthatók közt a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned}
a_1&=-a_0(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n),\\
a_2&=\ \ a_0(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots\alpha_{n-1}\ \alpha_n),\\
a_3&=-a_0(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\ \alpha_{n-1}\ \alpha_n),\ \ldots,\\
a_n&=(-1)^na_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n
\end{aligned}$$

Általában a_k-t megkaphatjuk, ha az α-k közül minden lehető módon kiválasztunk k-t, összeszorozzuk őket és a kapott szorzatok összegét megszorozzuk a_0-lal vagy $(-a_0)$-lal aszerint, hogy k páros vagy páratlan.

Ha speciálisan az (1) egyenlet gyökei $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{10}$, ezek négyzetösszegének kiszámításához elég a 9-edfokú és a 8-adfokú tag együtthatóját ismerni:

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{10}=-2,$$
$$\beta_1\beta_2+\ldots+\beta_1\beta_{10}+\beta_2\beta_3+\ldots+\beta_9\beta_{10}=5,$$

s így

$$\beta_1^2\beta_2^2+\ldots+\beta_{10}^2=(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{10})^2-2(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\ldots+$$
$$+\beta_9\beta_{10})=(-2)^2-2\cdot5=-6.$$

Ez a valós számok körében lehetetlen, tehát nem lehet az (1) egyenletnek 10 valós gyöke, és ezt kellett bebizonyítanunk.

Horányi Sándor (Budapest, Móricz Zs. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Feltételeztük, hogy egyenleteinknek annyi gyöke van, mint ahányad fokúak. Ez az *a*) esetben abból látható, hogy a 0-ra redukált egyenlet bal oldala a -2, 0, 2, 4 helyeken rendre -2, 4, -6, 16 értékeket vesz fel. Ezek váltakozó előjelűek, így 2–2 szomszédos hely közt felveszi a 0 értéket.

A *b*) rész tekinthető indirekt bizonyításnak: Ha volna 10 (valós) gyök, azok négyzetösszege pozitív kellene, hogy legyen, ami lehetetlen. Ha támaszkodunk a komplex számok ismeretére [2] is, ezek körében – amint azt először *C. F. Gauss*-nak sikerült bebizonyítania 18 éves korában –, minden (legalább első fokú) polinomnak van 0-helye. Ebből már következik – felhasználva[3], hogy egy polinomból, ha az α helyen eltűnik, kiemelhető az $x-\alpha$ gyöktényező –, hogy a komplex számok körében egy n-edfokú polinomnak n 0-helye van, amennyiben egy α 0-helyet, amelyhez tartozó gyöktényező k-adik hatványa emelhető ki, k-szor számítunk a 0-helyek közé. Így az (1) egyenletnek is 10 gyöke van a komplex számok körében, de nem lehet mind valós, mert négyzetösszegük negatív. (Lehetséges, hogy egy sem valós.)

---

[1] Lásd pl. *Surányi János:* Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961/11.), 103–105. o.

[2] Ezekhez úgy jutunk, hogy bevezetünk egy új i számot, ún. képzetes egységet, melynek a négyzete -1, ennek valós többszörösei a képzetes számok, egy valós és egy képzetes szám összegeként adódnak a komplex számok. Ezek körében értelmezhetők az alapműveletek úgy, hogy a szokásos műveleti szabályok érvényben maradjanak rájuk. A komplex számok körében minden (legalább első fokú) polinomnak van 0-helye. Lásd pl. *Varga Tamás:* Érettségi matematikai összefoglaló, Tankönyvkiadó, Budapest, 1961. 11. kiadás, 55–57. o.; továbbá *Rieger Richárd:* Komplex számok, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[3] Lásd pl. az 1. lábjegyzetben idézett cikket.