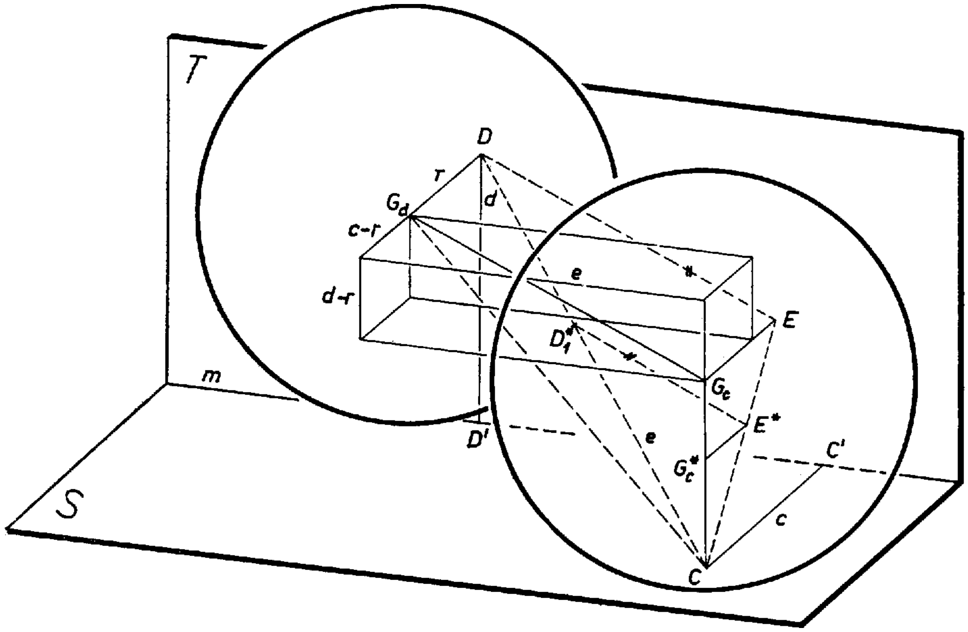
I. megoldás. A gömböket megszerkesztettnek tekintjük, ha meg tudjuk szerkeszteni sugaruk hosszát. Ekkor ugyanis a sugarat az érintési pontban a megfelelő síkra állított merőlegesre – kellő irányban – felmérve megkapjuk a gömb középpontját.



1. ábra

A gömbök r sugarát számítással állapítjuk meg. Keressünk olyan megoldást, melyben a két gömb G_c, ill. G_d középpontja abban a térnegyedben van, amelyet síkjainknak az érintési pontokat tartalmazó félsíkjai határolnak. (Azt a kivételes esetet, ha C és D között van az m-en fekvő pont, később tekintjük.) Fektessünk G_c-n és G_d-n át 3–3 olyan síkot, melyek egyike S-sel, másika T-vel párhuzamos, harmadikuk pedig merőleges m-re (1. ábra). Ez a 6 sík téglatestet határol, melyben a G_cG_d szakasz testátló – és hossza a gömbök érintkezése folytán $2r$ –, egy csúcsba összefutó 3 éle közül az m-mel párhuzamosnak hossza e, az S-re, ill. T-re merőleges él hossza pedig $d-r$, ill. $c-r$ abszolut értéke. (A c, d, e méreteket pozitívnak vesszük, mert a feladatban semmiféle irányítás nem szerepel.) Ezekből a testátlóra ismert összefüggés szerint

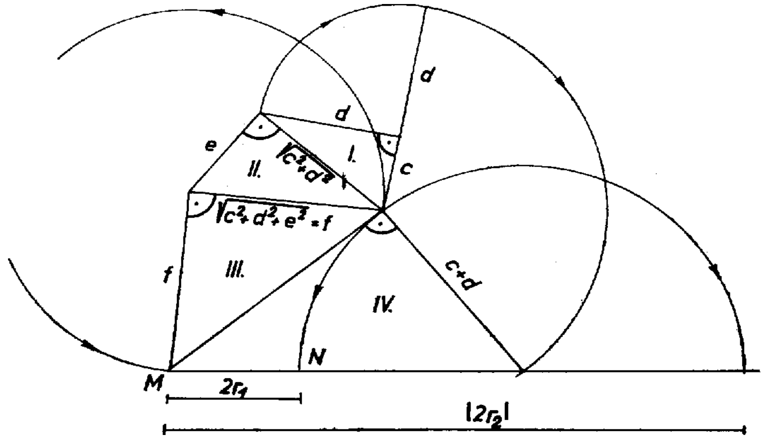
$$(c-r)^2+(d-r)^2+e^2=4r^2,$$

$$r^2+(c+d)r-\frac{c^2+d^2+e^2}{2}=0,$$

amiből

$$r=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2(c^2+d^2+e^2)+(c+d)^2}-(c+d)\right), \tag{1}$$

és ez pl. a Pythagorász–tétel ismételt alkalmazásával megszerkeszthető (2. ábra, az egymás után szerkesztett derékszögű háromszögeket I., II., III., IV. jelöli), a keresett gömbök átmérőjének hossza az MN szakasz, ebből – mint láttuk – a gömbök megszerkeszthetők.



2. ábra

A négyzetgyököt + jellel véve r nyilvánvalóan pozitív. Azonban a negatív r is ad egy megoldást, r negatív volta azt jelenti, hogy a középpontokba C-ből és D-ből a felvett irányokkal ellentétes irányban haladva jutunk el, a két középpont az eddig tekintett térnegyeddel szomszédos két térnegyed egyikében, ill. másikában van. Ebben a megoldásban az S-síkot C-ben érintő gömb átmetszi a T síkot, a másik gömb pedig átmetszi S-et (az 1. ábra helyzetében az előbbi S alatt van, az utóbbi T mögött), – ugyanis p1. az első gömbnek nincs pontja S fölött, tehát az érintkezési pont csak S alatt lehet. Emiatt nem lehet szó a megoldás elvetéséről, mert pl. az S-et C-ben érintő gömb T-vel való kölcsönös helyzetére nem áll fenn követelmény.

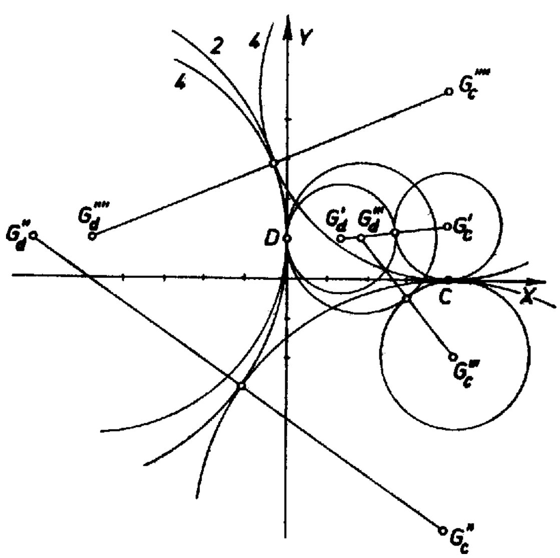
További két megoldást kapunk abból a feltevésből kiindulva, hogy G_d a T-nek azon az oldalán van, mint C, G_c pedig az S-nek D-vel ellentétes oldalán. Így a fenti számításban $|d-r|$ helyére $d+r$ lép, r értékét (1) adja meg, ha d helyére $-d$-t írunk. A gyökök itt is ellentétes előjelűek, mert szorzatuk, az egyenlet r-et nem tartalmazó tagja, negatív. A pozitív gyökkel kapjuk a fenti helyzetű G_c, G_d középpontokat, a negatív gyököt véve pedig G_c az S fölött, G_d a T mögött áll elő, mindkét megoldásban a gömbök az egyik síkot érintik, a másikat metszik. – Minden lehetőséget figyelembe vettünk, több megoldás nincs.

Előfordulhat, hogy G_c és G_d az első esetben vizsgált térnegyedben vannak, de a gömbök egyike mégis metszi a nem érintett síkot. Ilyen az az eset is, ha pl. $d=0$, hiszen ekkor minden lehetséges G_d benne van S-ben. Csak abban az esetben nincs megoldás, ha C és D azonos, ekkor $c=d=e=0$.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A pozitív r-re szorítkozva a sugarat az $r(r+c+d)=(c^2+d^2+e^2)/2$ egyenletalakból a kör érintőjére ismert tétel alapján is megszerkeszthetjük.

2. A feladat nem írta elő az összes megoldások megkeresését, a teljes megoldást a minél jobb térszemlélet kialakítása érdekében közöltük. Ezt kívánja segíteni a 3. ábra esete is, amelyen $C' \equiv D'$, $e=0$, C, D, G_c, G_d és az érintkezési pontok benne vannak abban a C'-n átmenő U síkban, amely merőleges m-re, a gömböknek csak az U-ba eső főkörét látjuk; $c=4$, $d=1$ egység.



3. ábra

II. megoldás. Tekintsük az S-et C-ben érintő gömb felületén a G_dD-vel megegyező irányú sugár E végpontját. Ekkor $DE = G_dG_c = 2G_cE$, mert a G_cG_dDE négyszög paralelogramma.

Kicsinyítsük az ábrát (a térbeli D, G_c, G_d, E pontrendszert) C-ből mint középpontból. A kicsinyítés arányát folytonosan változtatva a pontok képe rendre a CD, CG_c, CG_d, CE egyenesen mozog, és a G_cG_d szakasz kicsinyített képe mindig 2-szerese CG_c, DG_d és G_cE képének.

Mérjünk fel az S-re C-ben állított n merőleges egyenesre – G_c várt helyzetének irányában – egy tetszés szerinti r^* szakaszt, legyen a végpont G_c^*; továbbá G_c^*-ból T-re merőlegesen – a várt G_dD irányban – ugyancsak r^*-ot, a végpont E^*. Írjunk végül kört a CDE^* síkban E^* körül $2r^*$ sugárral, és messe ez a CD egyenest a D_1^*, D_2^* pontokban. Így a C, E^*, D_i^* pontrendszer ($i=1$ 2) hasonló helyzetű a C, E, D pontrendszerhez, ennélfogva E-t kimetszhetjük a CE^* egyenesből a D-n át $D_i^*E^*$-gal párhuzamosan vezetett egyenessel. Hasonlóan G_c-t n-ből kimetszi az E-n átmenő T-re merőleges egyenes, végül G_d-t a G_cEDG_d paralelogramma negyedik csúcsa adja, és a keresett gömbök sugara $G_cC = G_cE = G_dD$.

A CG_c^* és $G_c^*E^*$ irány megválasztására 2–2 lehetőség van, de ezek csak két CE^* egyenest adnak, így a fenti $i=1$, 2 eseteket sorra véve 4 megoldást kapunk. Az olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy a kapott gömbök kielégítik a feladat követelményeit.

M. I. nyomán