I. Két hely távolságának földrajzi koordinátáikból való számítására az 1214. feladatban a következő összefüggést használtuk:

$$\cos\vartheta=\sin\varphi_i\sin\varphi+\cos\varphi_i\cos\varphi\cos(\lambda_i-\lambda), \tag{1}$$

ahol φ, λ az egyik, φ_i, λ_i a másik hely földrajzi szélessége, ill. hosszúsága, ϑ pedig a szögtávolságuk, vagyis a (gömb alakúnak vett) Földnek a kérdéses helyekhez húzott sugarai által bezárt szög.

A kérdéses helyek koordinátái a térképről kb. 1/4 foknyi pontossággal leolvasva (ami esetünkben elegendő):

$$\text{Kairó } (K):\ \varphi_1=30^\circ,\ \lambda_1=31^\circ15';\quad \text{Fokváros } (F):\ \varphi_2=-34^\circ,\ \lambda_2=18^\circ30';$$
$$\text{Dakar } (D):\ \varphi_3=14^\circ45',\ \lambda_3=-17^\circ15'$$

(a negatív előjel déli szélességet, ill. nyugati hosszúságot jelent).

Ha a továbbiakban φ, λ a kérdéses P hely koordinátáit jelöli, ϑ pedig az egymással egyenlő PK, PF, PD szögtávolságok közös értékét, akkor (1)-ben i helyére rendre az 1, 2, 3 indexet írva a φ, λ, ϑ ismeretlenekre 3 egyenletet kapunk.

ϑ-t kiküszöbölhetjük két-két ilyen egyenlet kivonásával. Az $i=1$ és $i=2$ értékekkel adódó egyenletek kivonásával adódó egyenlet az alábbiak szerint alakul, ha benne a $\cos(\lambda_i-\lambda)$ tényezőt az addició-tétel alapján mindkétszer kifejtjük, 0-ra redukálunk és rendezünk:

$$\begin{gathered}(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)\sin\varphi+(\cos\varphi_1\cos\lambda_1-\cos\varphi_2\cos\lambda_2)\cos\varphi\cos\lambda+\\+(\cos\varphi_1\sin\lambda_1-\cos\varphi_2\sin\lambda_2)\cos\varphi\sin\lambda=0.\end{gathered} \tag{2}$$

Az $i=1$-gyel és $i=3$-mal adódó egyenletek kivonásával ugyanilyen egyenletet kapunk, a 2-es index helyén 3-as indexszel. A zárójelbeli – ismert – együtthatók helyett vezessük be a következő jelöléseket:

$$\sin\varphi_1-\sin\varphi_2=A_2,\qquad \sin\varphi_1-\sin\varphi_3=A_3,$$

$$\begin{gathered}\cos\varphi_1\cos\lambda_1-\cos\varphi_2\cos\lambda_2=B_2,\\ \cos\varphi_1\cos\lambda_1-\cos\varphi_3\cos\lambda_3=B_3,\\ \cos\varphi_1\sin\lambda_1-\cos\varphi_2\sin\lambda_2=C_2,\\ \cos\varphi_1\sin\lambda_1-\cos\varphi_3\sin\lambda_3=C_3,\end{gathered} \tag{3}$$

ezekkel a már csak φ-re és λ-ra vonatkozó egyenletrendszerünk:

$$\begin{gathered}A_2\sin\varphi+B_2\cos\varphi\cos\lambda+C_2\cos\varphi\sin\lambda=0,\\ A_3\sin\varphi+B_3\cos\varphi\cos\lambda+C_3\cos\varphi\sin\lambda=0,\end{gathered}$$

ahol a leolvasott adatok alapján:

$$\begin{array}{lll} A_2=1{,}0592, & B_2=-0{,}0458, & C_2=0{,}1862;\\ A_3=0{,}2454, & B_3=-0{,}1829, & C_3=0{,}7360.\end{array}$$

φ kiküszöbölése végett osszuk az első egyenletet $A_2\cos\varphi$-vel, a másodikat $A_3\cos\varphi$-vel. Az utóbbit az előbbiből kivonva az egyenlet minden tagja vagy csak a $\cos\lambda$, vagy csak a $\sin\lambda$ tényezőt tartalmazza ismeretlen gyanánt, így ezek hányadosa kiszámítható:

$$\operatorname{tg}\varphi+\frac{B_i}{A_i}\cos\lambda+\frac{C_i}{A_i}\cos\lambda=0,\qquad (i=2,\ 3) \tag{4}$$

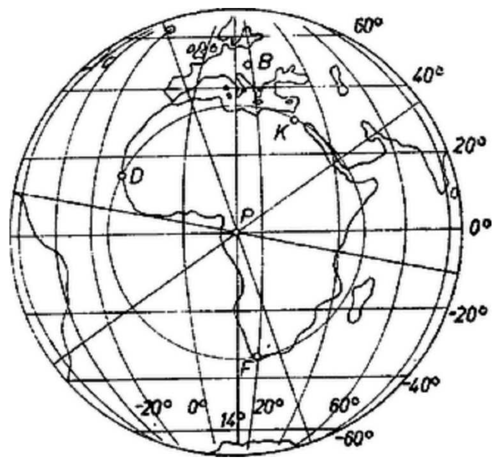
$$\left(\frac{B_2}{A_2}-\frac{B_3}{A_3}\right)\cos\lambda+\left(\frac{C_2}{A_2}-\frac{C_3}{A_3}\right)\sin\lambda=0,$$

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{A_2B_3-A_3B_2}{C_2A_3-C_3A_2}. \tag{5}$$

(A végzett osztások megengedettek voltak, mert – esetünkben – sem A_2, sem A_3, sem (5) nevezője nem 0, továbbá az ismeretlen φ-ről is tudjuk, hogy koszinusza különböző 0-tól, ugyanis a $\cos\varphi=0$ egyenlőségből $\varphi=\pm90^\circ$ következnék, vagyis hogy P gyanánt az Északi-sark és a Déli-sark jönne szóba, ez viszont nyilván csak akkor megoldás, ha mind a három adott hely földrajzi szélessége egyenlő. (Ez esetben $A_2=A_3=0$ is beállna.)

λ ismeretében φ értéke (4) bármelyik egyenletéből kiszámítható. Számadatainkkal $\lambda=13^\circ58'$, és $\varphi=-0^\circ1'$, illetőleg a kiindulási adatokhoz hasonlóan, a kapott koordinátákat is 1/4 fokra kerekítve, a keresett pont $P(0^\circ,\ 14^\circ)$. A 180°-kal nagyobb λ értéket mindjárt mellőzhettük, mert a 194°-os hosszúsági kör – más néven a 166° nyugati hosszúságú délkör – nem megy át Afrikán. (A „kör” szót itt a földrajzban szokásos értelemben vettük, geometriai szempontból a délkörök félkörök.) A P pont Afrikában van, Gabon és a Kongói Köztársaság (volt Francia Kongó) határvidékén, ennélfogva a feladat első kérdésére a válasz igenlő, P távolsága (1) szerint mindhárom várostól 34,2°, kb. 3800 km.

II. Az eredmény szerint egy csapásra a feladat második kérdésére is megkaptuk a választ, hiszen P az Egyenlítőn adódott, és P mind a három kérdéses főkörön rajta van. E főkörök az Egyenlítőt a fent említett 166° nyugati hosszúságú pontjában is metszik, a Főnix szigetektől ÉK felé, kb.600 km-nyire.



Ha ez a véletlen nem adódott volna, akkor a kérdéses pontokat pl. a K-tól és F-től egyenlő távolságra haladó főkörre nézve (2)-ből számítottuk volna. Ezt az egyenletet ugyanis abból a követelményből kaptuk, hogy a φ, λ koordinátájú pontnak egyenlő szögtávolságra kell lennie K-től és F-től, ez tehát az előírt tulajdonságú pontok mértani helyének egyenlete (a Föld felületének pontjaira vonatkoztatva). Ez a mértani hely a Földnek valóban főköre. Ugyanis a térnek K-tól és F-től egyenlő távolságra levő pontjai az FK szakasz felező merőleges síkján vannak, és ez a sík átmegy a gömb O középpontján, mert $OK = OF$, tehát főkört metsz ki. Így (2) a főkör egyenlete.

Az Egyenlítő pontjaira $\varphi = 0°$ (ez az Egyenlítő egyenlete, írható $\sin\varphi = 0$, vagy $\cos\varphi = 1$ alakban is), tehát a keresett pontok λ_0 hosszúságaira (2)-ből a (3) jelölésekkel

$$B_2 \cos\lambda_0 + C_2 \sin\lambda_0 = 0,$$
$$\operatorname{tg}\lambda_0 = -B_2/C_2,$$

(feltéve, hogy $C_2 \neq 0$, a kizárt esetben pedig $\lambda_0 = \pm 90°$). Adatainkkal az Afrikába eső metszéspont a KF körre $13°49'$, KD-re $13°57'$, FD-re $14°0'$, a leolvasási kerekítésekre tekintettel egybeesőknek vehetők.

Huhn András (Szeged, Ságvári E. g. III. o. t.)
Kóbor György (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az általános megoldás bővebb elemzésébe nem bocsátkoztunk bele, tekintettel a feladat konkrét jellegére.

2. Több dolgozat síkgeometriai úton próbálta megoldani a feladatot, vagyis a sík térképen látható helyzetet véve valóságnak. Ez a szereplő városok közti nagy távolságok mellett nem elfogadható. A megoldás kulcsát a feladathoz fűzött jegyzet az olvasók kezébe is adta. Így a feladat lényegében leszűkült egy egyszerű goniometrikus egyenletrendszer megoldására.

3. Vázlatunk a Földet a P pontbeli érintősíkra vetítve mutatja, merőleges vetítéssel. Így a felező merőleges főkörök vetülete a Föld képének egy-egy átmérője, és a D, F, K pontokon átmenő gömbi kis-kör vetülete kör. – Ez a vázlat természetesen nem használható a feladat „síkbeli" megoldásához, hiszen csak a P pont ismeretében, utólag készülhetett.