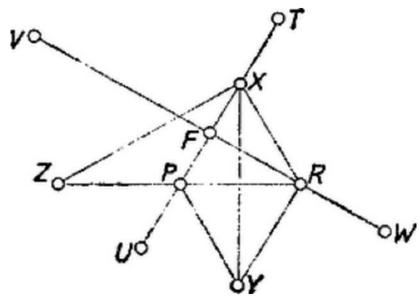
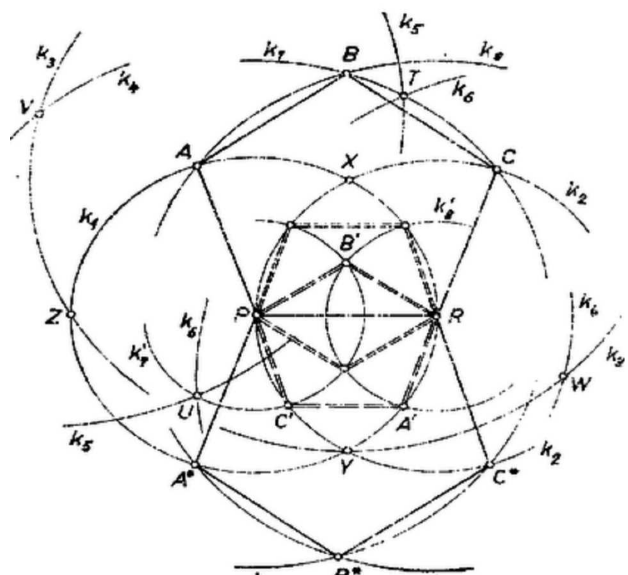
A szabályos ötszög bármelyik két csúcsát vagy egy oldal, vagy egy átló köti össze, és mind az öt átló egyenlő; így a PR szakasz vagy oldala, vagy átlója az ötszögnek. Az első esetben P és R szomszédos csúcsok, a P-vel szomszédos másik csúcs k_1-en lesz, ebből kell kimetszenünk alkalmas körrel – mert csak körzőt használhatunk –, az R-rel szomszédos másik csúcs pedig k_2-n lesz. A második esetben P, R szemben fekvő csúcsok, így a P-vel szemben levő másik csúcs lesz k_1-en, az R-rel szemben levő másik csúcs pedig k_2-n.

Az első esetnél maradva kézenfekvő arra gondolni, hogy a P-vel szomszédos A csúcsnak k_1-ből való kimetszését egy az R körül írt további körrel végezte az eljárás elveszett befejezése. Ekkor k_7 sugara a PR oldalú szabályos ötszög átlója. Ugyanekkora sugarú, a P körül írt kör kimetszhetné k_2-ből az R melletti C csúcsot, és e két kör metszéspontja megadhatná az ötszögnek a PR oldallal szemben levő B csúcsát, vagyis az átlót ismerve a hátra levő két lépésben befejezhetnénk a szerkesztést. Így – ha feltevésünk találó – az átlónak már csak a felhasználására futja a további két lépésből, tehát az átló hosszának már meg kell lennie az ábrán, annak a k_6 megrajzolása utáni fázisában – éspedig a megnevezett pontok valamelyik párjának távolsága gyanánt, – hiszen az első hat kör számos további metszéspontot ad, és a könyv bizonyára csak a tovább felhasználandó pontokra vezetett be betű-jelölést. Továbbmenve az átló hosszát megadó pontpár egyik tagja a k_6 révén kapott, U vagy T, különben ezek megszerkesztése és megjelölése felesleges volna, a szerkesztés kevesebb kör rajzolásával lenne befejezhető.



1. ábra



2. ábra

A szabályos ötszög átlójának és oldalának aránya az egy átló által lemetszett egyenlő szárú háromszögből[1] $2\cos 36^\circ = (\sqrt{5}+1)/2$. Megmutatjuk, hogy egységnek véve P és R távolságát, P és T távolságának mértékszáma éppen egyenlő ezzel az arányszámmal.

PRX és PRY egyenlő oldalú háromszögek (1. ábra, ezen a jobb áttekintés érdekében a köröket mellőztük, és a szóba jövő távolságokat egyenesszakasszal meg is rajzoltuk), ezért $XY = \sqrt{3}$, továbbá $XPY\sphericalangle = 120^\circ$. Az $XVPW$ négyszög rombusz, így VW merőlegesen felezi PX-et, továbbá $VW^2 = 4XY^2 - PX^2 = 11$, mivel minden paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. XPY és XPZ egybevágó háromszögek, mert oldalaik páronként egyenlők, így $XPZ\sphericalangle = 120^\circ$, ezért Z rajta van a P, R pontokkal meghatározott egyenesen, tehát $RZ = 2$. A fentiekhez hasonlóan az $UVTW$ idom rombusz, és UT merőlegesen felezi VW-t, tehát U és T rajta vannak a P-vel és X-szel meghatározott egyenesen, és $UT^2 = 4RZ^2 - VW^2 = 5$. Mostmár PX, VW és UT közös felezőpontját F-fel jelölve

$$PT = PF + FT = \frac{PX + UT}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

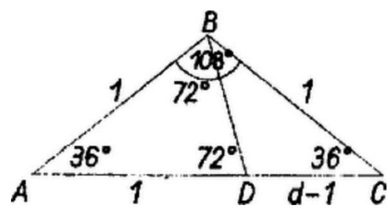
[1] Felhasználjuk $\cos 36^\circ$-nak az 1213. feladatban idézett értékét, lásd K. M. L. 27 (1963/9. 19. o.)

ezt akartuk bizonyítani, és ennek alapján – mint láttuk – a $k_7 = P(PT)$ és $k_8 = R(PT)$ köröket megrajzolva a hiányzó A, B, C csúcsok kiadódnak, A, B, C, R, P egy szabályos ötszög csúcsai.

Hasonlóan jutunk célhoz, ha az adott P-t és R-et a keresett szabályos ötszög két nem szomszédos csúcsának tekintjük, és keressük az ábra k_6 berajzolása utáni fázisában az ötszög oldalának hosszát. Az oldal az átlónak $1/(2\cos 36°) = 2/(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5}-1)/2$ része, ezt a fentiek szerint megadja P és U távolsága, tehát a $k_7' = P(PU)$, $k_8' = R(PU)$ körök metszik ki k_2-ből, ill. k_1-ből, ill. egymásból az ötszög hiányzó csúcsait.

Mindkét esetben két ötszöget kapunk, ezek egymás tükrös párjai a P-n és R-en átmenő egyenesre.

Nagy Klára (Makó, József A. g. III. o. t.)



3. ábra

Megjegyzés. A szabályos ötszög átlójának és oldalának arányát szögfüggvény felhasználása nélkül is meghatározhatjuk. Legyen az ABC háromszögben $AB = BC = 1$, $AC = d$ és $ABC\sphericalangle = 108°$. Mérjük rá AB-t az AC oldalra A-tól, legyen a végpont D. Ekkor $CAB\sphericalangle = 36°$; $ABD\sphericalangle = ADB\sphericalangle = 72°$; $DBC\sphericalangle = 36° = DCB\sphericalangle$; tehát $CDB\triangle \sim ABC\triangle$; $CD : CB = AB : AC$, azaz $(d-1) : : 1 = 1 : d$; $d^2 - d - 1 = 0$, és ennek pozitív gyöke $d = (\sqrt{5}+1)/2$.