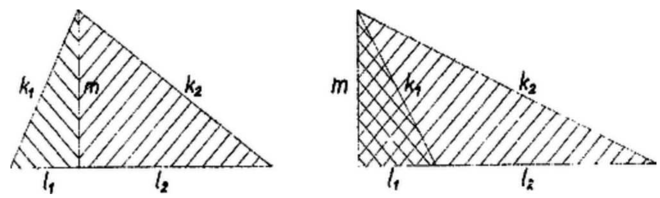
Ha egy trapéz megfelel a feladat követelményeinek, akkor egyik alapja egy-egy szárral és átlóval két olyan háromszöget alkot, amelyek oldalainak mértékszáma egész, egy oldaluk egyenlő, magasságuk 24, és az egyenlő oldalak mentén egymásra téve őket a közös oldallal szemben levő csúcsok távolsága is egész. Ilyen háromszögek keresése eredményes lesz összetolással, illetve részbeni fedéssel azokból a pythagorászi háromszögekből (1. ábra), amelyek egyik befogószáma $m = 24$. Így a magasságok talppontjainak az alap végpontjaitól mért távolságai egész számok, ezért a trapéz másik alapja is egész lesz.



1. ábra

A mondott számhármasok átfogószámát k-val, másik befogószámát l-lel jelölve $m^2 = 576 = k^2 - l^2 = (k-l)(k+l)$. Itt a jobb oldal tényezői egész számok, továbbá párosak. Ugyanis szorzatuk páros, ezért az egyik tényező páros, így viszont összegük, $2k$, és különbségük, $2l$, csak akkor páros, ha a másik tényező is páros. Eszerint a k, l, 24 pythagorászi számhármasokat 576-nak két különböző páros szám szorzata gyanánt való előállításából kapjuk (ugyanis $k-l < k+l$). Hét ilyen van, lásd az I. táblázat egy-egy oszlopát.

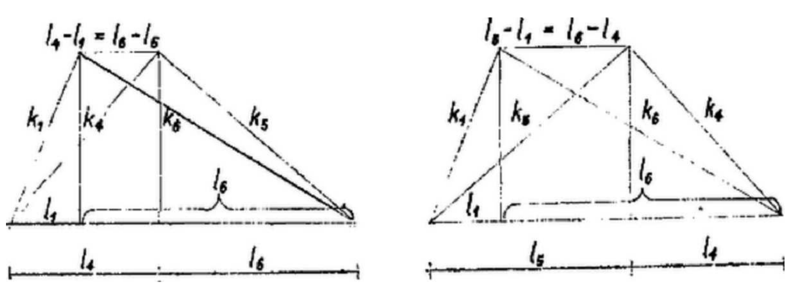
I.	$k-l =$ 2,	4,	6,	8,	12,	16,	18;
	$k+l =$ 288,	144,	96,	72,	48,	36,	32;
	$k =$ 145,	74,	51,	40,	30,	26,	25;
$m = 24$,	$l =$ 143,	70,	45,	32,	18,	10,	7.

Két-két (különböző, ill. egyenlő) l-befogó összegét és különbségét a II. táblázaton állítottuk össze, amelyen minden egyes l-értékhez egy sor és egy oszlop tartozik, az i-edik sor és a j-edik oszlop közös mezején $i \leq j$ esetén (a jobbra lejtő átlón és tőle jobbra fölfelé) az $l_j + l_i$ összeg áll, $i > j$ esetén pedig (balra lefelé) az $l_j - l_i$ különbség.

A táblázat 49 racionális háromszöget ad az $m = 24$ magasság-számhoz. Szóba jönnek továbbá maguk a felhasznált pythagorászi háromszögek is, hiszen amennyiben létezik derékszögű a trapézek között, annak származtató háromszögei közül az egyikben az alapon derékszög van.

II.	$l_1 = 7$,	$l_2 = 10$,	$l_3 = 18$,	$l_4 = 32$,	$l_5 = 45$,	$l_6 = 70$,	$l_7 = 143$
$l_1 =$ 7	14	17	25	39	52	77	150
$l_2 =$ 10	3	20	28	42	55	80	153
$l_3 =$ 18	11	8	36	50	63	88	161
$l_4 =$ 32	25	22	14	64	77	102	175
$l_5 =$ 45	38	35	27	13	90	115	188
$l_6 =$ 70	63	60	52	38	25	140	213
$l_7 =$ 143	136	133	125	111	98	73	286

Nyilvánvaló, hogy minden $l_j + l_i (i \neq j)$ alapú háromszögből az alap felező merőlegesén való tükrözéssel egy racionális szimmetrikus trapézt kapunk, ennek rövidebb alapja $l_j - l_i$, az ilyenek száma tehát 21. Ha ugyanígy egy derékszögű háromszöget tükrözünk l_i felező merőlegesére, 7 racionális téglalap keletkezik. Tulajdonképpeni feladatunknak azonban a nem szimmetrikus racionális trapézok előállítását tartjuk, ezek érdekesebbek, mert száraik és átlóik különböző egész számok. Ilyen trapéz alapjai gyanánt a táblázatnak csak az ismétlődő számai szerepelhetnek, ezeket kiemeltük kövér nyomtatással.



2. ábra

Két egyező alaphosszra a két Heron-háromszöget kétféleképpen helyezhetjük rá, ha egyikük sem egyenlő szárú. Pl. a

(1) $$77 = l_1 + l_6 = l_4 + l_5$$

egyenlőség alapján a 77 egységnyi alap l_1 részének végpontjára vagy az l_4, vagy az l_5 rész végpontját illeszthetjük rá, és így a másik alap mértékszámán az első esetben $l_4 - l_1 = l_6 - l_5 = 25$, a másodikban $l_5 - l_1 = l_6 - l_4 = 38$ adódik (ezek természetesen ugyancsak ismétlődő alaphosszai a táblázatnak; 2. ábra), az egyenlőségek (1)-ből adódnak átrendezéssel. A trapéz átlóit és szárait a megfelelő számhármasok k_1, k_4, k_5, k_6 átfogószámai adják.

	Alapok		Szárak		Átlók		Magasság
III.	14	**25**	**25**	**30**	**25**	**40**	**24**
	25	**25**	**25**	**25**	**30**	**40**	**24**
	25	38	40	51	**25**	**74**	**24**
	25	**52**	30	51	**25**	**74**	**24**
	25	**63**	**25**	51	30	**74**	**24**
	25	77	**25**	51	40	**74**	**24**
	38	77	**25**	40	51	**74**	**24**
	52	63	**25**	30	51	**74**	**24**

Hasonlóan végigmenve a táblázat összes egyező számpárjain, a III. táblázaton felsorolt 8 racionális trapézhez jutunk. A 63, 52, 38 alapszám két-két előfordulásából is 2–2 trapéz adódik, viszont a 25-ös három előfordulása háromféleképpen állítható párba, ezekből $3 \cdot 2 = 6$ trapéz, a 14 alapszám előfordulásaiból pedig 1, mert a 14, 25, 25 háromszög szimmetrikus m-re. Így a fenti trapézeket mindkét alapjuk révén megkapjuk, kivéve a 2. sorbelit, amely racionális paralelogramma (rombusz).

Nagy László (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. III. o. t.)
Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat nem kívánta az $m = 24$ magasságszámhoz tartozó összes racionális trapézek előállítását; a fentieket azért közöltük, mert különböző versenyzők más-más megoldást találtak.

2. A fentieken kívül további megoldás nincs, megmutatjuk ugyanis, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalainak és az a oldalhoz tartozó m magasságának hossza egész szám, akkor m talppontjának az a végpontjaitól mért

$$a_b = \sqrt{b^2 - m^2} = \sqrt{p} \qquad \text{és} \quad a_c = \sqrt{c^2 - m^2} = \sqrt{q}$$

távolságai is egész számok. Ugyanis ezeknek vagy az összege egyenlő a-val, vagy (ha az a oldal egyik végpontjában tompaszög van) a pozitív különbsége:

$$\sqrt{p} \pm \sqrt{q} = a. \tag{2}$$

Ebből négyzetreemeléssel és rendezéssel

$$\pm 2\sqrt{pq} = a^2 - p - q = r,$$

egész szám, mert p, q egészek. Így $\pm\sqrt{q} = r/2\sqrt{p}$ és (2) alapján mindkét négyzetgyök racionális szám, ugyanis

$$\sqrt{p} + \frac{r}{2\sqrt{p}} = \frac{2p + r}{2\sqrt{p}} = a, \quad \sqrt{p} = \frac{2p + r}{2a}, \quad \sqrt{q} = a - \sqrt{p} = \frac{r + 2q}{2a}.$$

Így egészek is, mert ha egy racionális szám nem egész, akkor négyzete sem az.

Eszerint feltételeink mellett b, m, a_b és c, m, a_c pythagorászi számhármasok, a fentiekben az adott magassághoz megkaptuk az összes racionális trapézokat.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)