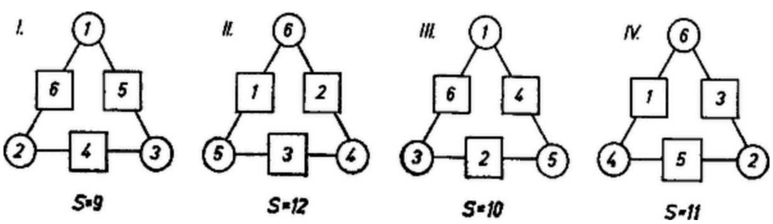
Ha van minden páratlan $n(\geq 3)$ esetén érvényes elv a kívánt elrendezéshez, akkor azt $n = 3$-ra alkalmazva az adódó elrendezésnek elő kell fordulnia az $n = 3$ eset összes megoldásai között. Ezért előállítjuk az $n = 3$ eset összes megoldásait, majd megkísérlünk belőlük olyan általános elveket kiolvasni, amelyek bármely n páratlan szám esetében megfelelnek.

Legyen az oldalak összege S. A 3 oldal együttes összegében minden előírt szám előfordul egyszer, a csúcsokon álló három szám pedig mégegyszer. Így a csúcsokra előbb a legkisebb három, majd a legnagyobb három számot választva alsó, ill. felső korlátot kapunk S-re:

$$3S \geq (1+2+3+4+5+6) + (1+2+3) = 21 + 6, \qquad S \geq 9, \tag{1}$$
$$3S \leq 21 + (6+5+4), \qquad S \leq 12.$$

Tekintsük először az $S = 9$ és $S = 12$ értékeket. S és a csúcsokon álló számok meghatározzák az oldalfelező pontokhoz rendelendő számokat. A kiválasztott három számot szimmetriáktól eltekintve csak egyféleképpen lehet elrendezni a csúcsokon. Mindkét próbálkozásból egy-egy megoldást kapunk (1. ábra I–II.).



1. ábra

Vegyük észre, hogy a két megoldásban a megfelelő helyeken álló számpárok összege minden esetben 7. Ez azt jelenti, hogy bármelyik megoldás bármelyik száma helyére a másik megoldásban az a szám lép, amely neki az előírt számok növekvő felsorolásában a középpontra (a 3 és 4 közti hézagra) nézve tükrös helyzetű párja. Ezzel a helyettesítéssel bármely más megoldásból is, továbbá bármely páratlan n esetén is kapunk egy új megoldást, mert a páros cserékből álló helyettesítés után is minden előírt szám fellép, és az összegek is egyenlők, az
$a_1 + a_2 + a_3 = S =$ állandó összeg helyén $(7 - a_1) + (7 - a_2) + (7 - a_3) = 21 - S =$ állandó összeg adódik, általában pedig az

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n \tag{2}$$

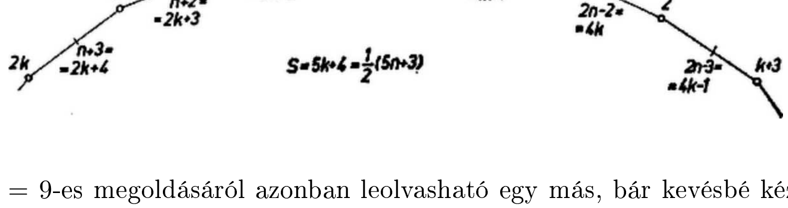
számok elrendezése esetén

$$(2n+1-a_1) + (2n+1-a_2) + (2n+1-a_3) = 3(2n+1) - S.$$

Így a hátralevő $S = 10$ és $S = 11$ lehetőségek közül elég pl. az elsővel próbálkoznunk.

(1) szerint akkor adódik $S = 9$ helyén 1-gyel nagyobb érték, ha a csúcsokon álló számok $1 + 2 + 3$ összegét 3-mal növeljük. Nem vehető azonban $1 + 2 + 6$, mert így 1 és 2 közé 7-et kellene írnunk, ami nem megengedett. Így csak $1+3+5$ állhat a csúcsokon, ebből adódik – mindjárt a fenti tükrözés alkalmazásával – az 1. ábra III. és IV. megoldása. (Nincs ugyanis több megoldás, mert a csúcsokra a 2, 3, 4 számokat véve a 6-os szám egyik oldal közepére sem írható, mindenképpen túllépnők $S = 10$-et.) – Ebben a két megoldásban az összes páratlan (ill. páros) számaink kerültek a csúcsokra.

Ha n-szöget véve az $S = 9$ esetén talált megoldás mintájára, a (2) sorozat első felének egymás utáni tagjait pl. az óramutató járásáéval ellentétes irányban haladva rendeljük hozzá a csúcsokhoz: nem kapunk megoldást. Így ugyanis az egymás utáni oldalak végpontjain álló számpárok összegének $1+2 = 3$, $2+3 = 5$, $3+4 = 7, \ldots, (n-1)+n = 2n-1$, $n+1$ sorozata 2-esével növekvő sorozat (eltekintve az utolsó tagtól), ezért az oldalfelező pontokhoz az összeg-követelmény alapján hozzáírandó $S - 3$, $S - 5$, $S - 7, \ldots$ számok sorozata 2-esével csökkenő sorozat, tehát ezek a számok nem alkothatják (2) második felét.



2. ábra

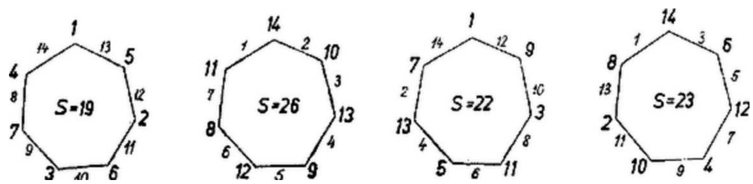
Az $n = 3$ eset $S = 9$-es megoldásáról azonban leolvasható egy más, bár kevésbé kézenfekvő rendszeresség is: az óramutató járásának irányában haladva mondhatjuk, hogy az 1, 2, 3 számokat minden második csúcshoz rendeltük hozzá. Írjuk tehát a (2) sorozat első felének egymás utáni számait is rendre az n-szög minden második csúcsához.

Ennek során az n-szög első körüljárásában csak a páratlan sorszámú csúcsokat töltjük be (az 1-essel betöltött csúcsot véve elsőnek). Ha $n=2k+1$, akkor a $2k+1$-edik, vagyis az 1-es előtti csúcshoz a $k+1$-et írjuk, mert $2k+1=2(k+1)-1$ a páratlan számok sorozatában a $k+1$-edik tag. A második körüljárásban az előbb átlépett csúcsokhoz az 1 és 2 közé $k+2$ kerül, 2 és 3 közé $k+3$, …, végül az utolsó üres csúcsra, $k+1$ elé az utolsó tervbe vett szám, a $2k+1$.

Ekkor az 1-es csúcs előtti oldal két végpontján $(k+1)+1=k+2$ az összeg, majd az 1-es csúcs utáni oldalak végpontjain egymás után $1+(k+2)=k+3$, $(k+2)+2=k+4$, $2+(k+3)=k+5$, $(k+3)+3=k+6$, …, rendre 1-gyel nagyobb összeg adódik, mert két egymás utáni oldal egyik száma közös, a nem közös szám pedig a későbbi oldalon 1-gyel nagyobb, mint a megelőző oldalon. Az utolsó – az 1-es előtti második – oldal végpontjain $(2k+1)+(k+1)=3k+2$ az összeg, és ez valóban $n=2k+1$-edik tagja a természetes számok felsorolásának, $k+2$-től kezdve: $(k+2)+(n-1)=(k+2)+2k=3k+2$.

Ha már most az oldalak felezőpontjaihoz a legutóbbi felsorolás rendjében a $2n$, $2n-1$, $2n-2$, …, $n+2$, $n+1$ számok 1-esével csökkenő sorozatának tagjait rendeljük hozzá, akkor az n-szög minden oldalán nyilvánvalóan ugyanannyi az összeg, másrészt az előírt számok mindegyikét egyszer felhasználtuk, tehát megoldást kaptunk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Hasonlóan látható be, hogy megfelelő hozzárendelést kapunk az $n=3$, $S=10$ eset következő általánosításával is: először az 1, 3, 5, …, $2n-1$ páratlan számokat rendeljük hozzá egymás után az n-szög minden második csúcsához, majd pedig a $2n$, $2n-2$, $2n-4$, …, 4, 2 páros számokat az egymás utáni oldalak felezőpontjaihoz, $(n+1)/2$ és 1 közé $2n$-et írva, a következőket pedig az előbbivel megegyező irányú körüljárás mentén haladva. – Önállóan megfogalmazható az $n=3$, $S=12$, ill. $S=11$ esetben talált megoldás általánosítása is (minden második csúcsra a „nagy” számokat: $2n$, $2n-1$, $2n-2$, …, $n+1$-et, ill. a páros számokat: $2n$, $2n-2$, $2n-4$, …, 4, 2-t). A négy hozzárendelési elvet $n=7$ esetére bemutatjuk (3. ábra).



3. ábra

Szemkeő Judit (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. III. o. t.)