a) Legyen az első egyenlet egy gyöke c, ez nyilván nem lehet 0. Reriprokát a második egyenlet bal oldalába helyettesítve

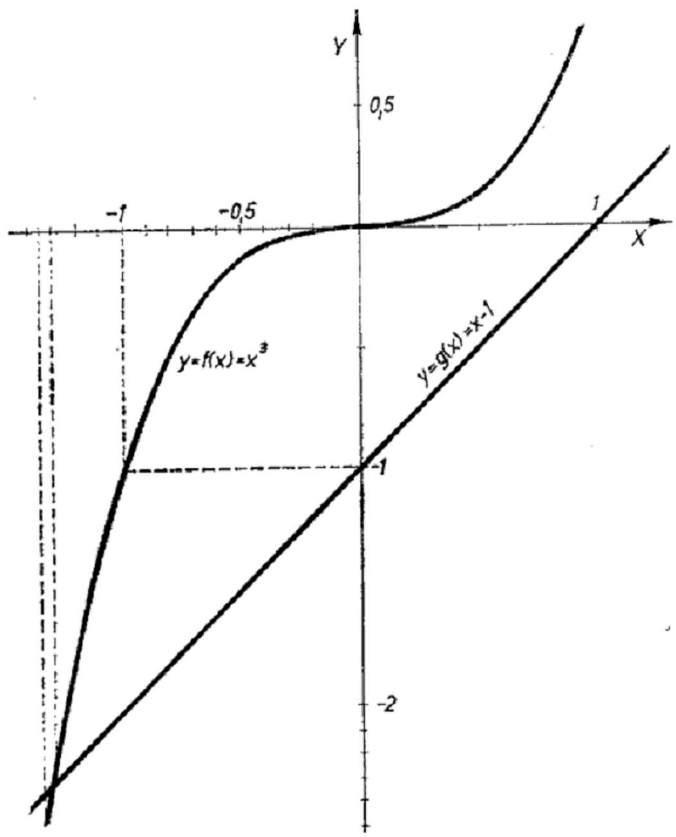
$$\left(\frac{1}{c}\right)^5+\frac{1}{c}+1=\frac{1}{c^5}\left(1+c^4+c^5\right).$$

Ez csak úgy lehet 0, ha a második tényező 0. Ez biztosan bekövetkezik, ha kiemelhető belőle a feltétel szerint 0-val egyenlő c^3-c+1 tényező; ez teljesül is:

$$1+c^4+c^5=\left(1-c+c^3\right)\left(1+c+c^2\right).$$

Mivel c az első egyenlet bármelyik gyökét jelentheti, mindegyik gyök reciproka kielégíti a második egyenletet is.

b) A valós gyök meghatározására írjuk a második egyenletet $x^5=-x-1$ alakban. A bal oldal x növekedtével nő, a jobb oldal csökken, tehát csak egy közös értékük lehet, és egy van is, mert $x=-1$-re a bal oldal a kisebb, $x=0$-ra pedig a jobb oldal.



Az első egyenlet ígér kényelmesebb számítást, írjuk azt $x^3=x-1$ alakban, és ábrázoljuk az $f(x)=x^3$ és $g(x)=x-1$ függvényeket. A metszéspont abszcisszájára $=$ 1,3 körüli értéket olvasunk le. Behelyettesítve: $f(-1{,}3)=-2{,}197$, $g(-1{,}3)=-2{,}3<f(-1{,}3)$, tehát a gyök ennél kisebb érték. Helyettesítve $-1{,}35$-öt:

$$f(-1{,}35)=-1{,}35\cdot 1{,}35^2<-1{,}35\cdot 1{,}8=-2{,}43<g(-1{,}35)=-2{,}35,$$

így a keresett gyök $-1{,}35$ és $-1{,}3$ közé esik, tehát közelítő értéke egy tizedes pontossággal $-1{,}3$.

Mostmár a második egyenlet gyöke az *a)* részben bebizonyított állítás szerint $-1{,}35$ és $-1{,}3$ reciproka közé esik. Az utóbbi reciproka nagyobb $-0{,}77$-nál, az előbbi reciproka kisebb $-0{,}74$-nál. Egy tizedesre kerekítve a közbülső értékek egy része $-0{,}8$-et ad, egy részük $-0{,}7$-et. Behelyettesítve $-0{,}75=-3/4$-et az $x^5=-x-1$ alakba, a bal oldal $-243/1024$, a jobb $-1/4$, ez a kisebb, így a fentiek szerint a két oldal valamely a $-3/4$-nél kisebb érték esetében egyenlő, tehát kerekítve a gyök $-0{,}8$.

Tongori Éva (Székesfehérvár, Teleki B. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Néhányan az $x^3-x+1=0$ egyenlet valós gyökét az $x^3+px+q=0$ egyenlet ún. *Cardano*-féle

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

gyökképletével határozták meg, ami – ebben az esetben – több számolással járt a fenti próbálgatásnál.