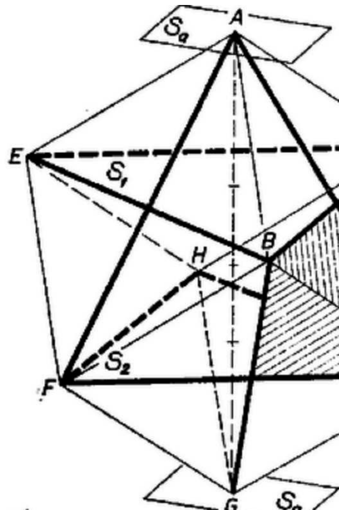
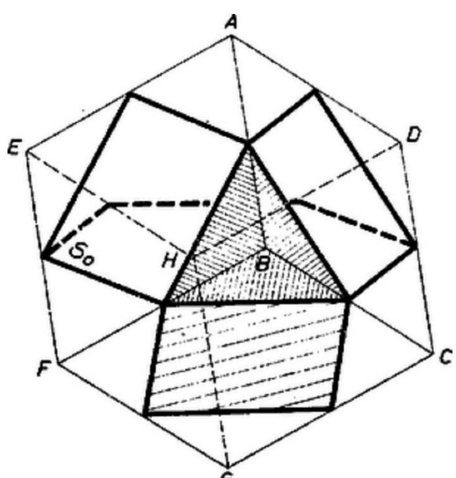
I. Legyen a kocka két párhuzamos lapja $ABCD$ és $EFGH$ úgy, hogy AE és BF párhuzamos élek. Vizsgáljuk először pl. az AG testátló felező és harmadoló pontjaiban az átlóra merőlegesen állított síkokat. Azt állítjuk, hogy az utóbbi két sík a B, D, E és a C, F, H csúcsokon átmenő S_1 és S_2 sík, más szóval az A-ból, ill. G-ből induló élek végpontjain átmenő sík.



1. ábra

Ez következik abból, hogy egyrészt az ABG, ADG, AEG egybevágó háromszögek B, D, ill. E csúcsából húzott magasság ugyanabban a pontban metszi AG-t, tehát S_1 az ebben a pontban AG-re állított merőleges sík, és hasonlóan S_2 is merőleges AG-re. Másrészt A-ban és G-ben is S_a, ill. S_g merőleges síkot állítva AG-re a szomszédos síkpárok közé párhuzamos (és egyenlő) kockaélek esnek: S_a és S_1 közé AB, S_1 és S_2, közé DC, továbbá S_2 és S_g közé HG. Ezek a síkpárok tehát egyenlő távolságra vannak egymástól, s így AG-t 3 egyenlő részre osztják. S_1 és $_2$ tehát valóban az AG harmadoló pontjaiban állított, egyértelműen meghatározott merőleges síkok.



2.ábra

Az AG-re a felező pontjában állított S_0 merőleges sík S_1 és S_2 közt, velük párhuzamosan és tőlük egyenlő távolságban helyezkedik el, így felezi a kocka

$$BF, \quad FE, \quad EH, \quad HD, \quad DC, \quad CB \tag{1}$$

éleit, más szóval mindazokat az éleket, amelyeknek sem A, sem G nem végpontja.

II. Tekintsük előbb a feladat második kérdését. S_1 és S_2 a kocka felületét az A, ill. G csúcsban összefutó 3–3 lapnak A-t, ill. G-t nem tartalmazó átlóiban metszi. Sorra véve a BH, CE, DF testátlókat merőlegesen harmadoló síkpárokat, A és G helyén minden kockacsúcs sorra kerül és osztóvonal gyanánt minden lapbeli átló is, éspedig mindegyik kétszer, és más osztóvonal nem lép fel. A lapbeli átlók a kocka 6 lapját 24 egyenlő szárú derékszögű háromszögre darabolják szét. 2–2 ilyen háromszög átfogója közös, a kocka 1–1 éle, ami nem osztóvonal, a háromszögpár összefüggő részt alkot, tehát a 4 síkpár a kocka felületét 12 részre osztja.

A feladat első kérdésében S_0 szerepel, ez a kocka mindegyik lapjából lemetsz egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelyben a derékszög csúcsa a lapnak A-val, ill. G-vel szemben fekvő csúcsa, átfogója pedig az ide befutó oldalak felezőpontjait összekötő szakasz, ezekből a szakaszokból tevődik össze S_0 metszésvonala. Sorra véve a további 3 testátló felező merőleges síkjait, A és G helyén minden kockacsúcs sorra kerül, a kis háromszög derékszögének csúcsa gyanánt ugyancsak, éspedig 3-szor, továbbá átfogó végpontja gyanánt minden él felezőpontja is, 2-szer. Így a kocka mindegyik lapja 4 kis háromszögre és köztük 1 négyzetre oszlik. Az utóbbiaknak a teljes kerülete osztóvonal, ezek tehát a felület különálló részei lesznek. A kis háromszögek viszont 3-asával 1–1 kockacsúcsban futnak össze, egymáshoz páronként befogójukkal csatlakoznak, ami nem osztóvonal, tehát 3–3 kis háromszög a kockafelület 1–1 összefüggő részét alkotja, amelynek határvonalát a 3 átfogó adja. Ezek szerint a kocka felületét a testátlók felező merőleges síkjai 6+8=14 részre osztják fel.

Sükösd Csaba (Budapest, József A. g. III. o. t.)
Csörnyei Zoltán (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)