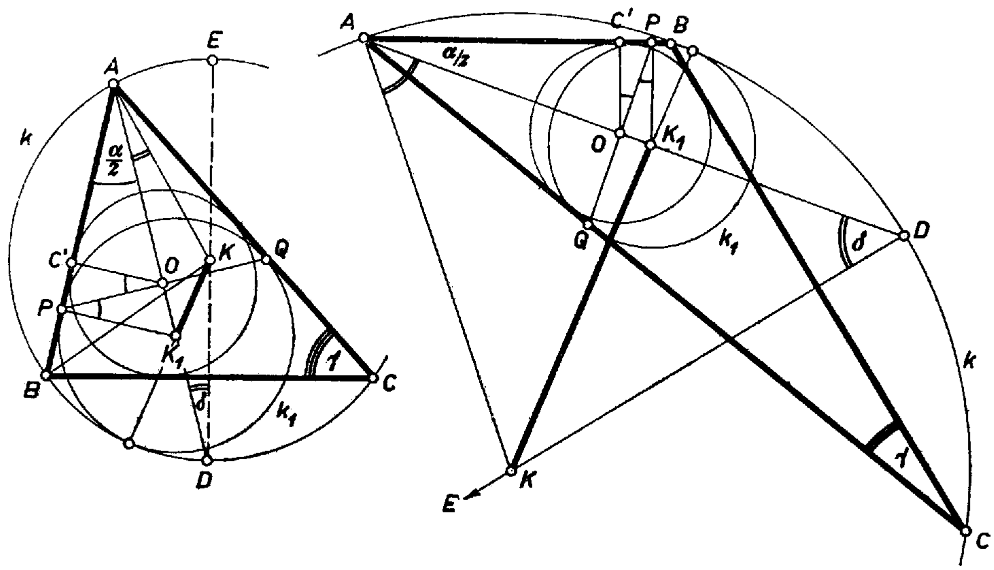
A feladatban állított érintkezés következik abból, ha megmutatjuk, hogy a kérdéses k_1 kör K_1 középpontjának a háromszög köré írt k kör K középpontjától mért távolságának és a két kör r_1 és r sugara különbségének a négyzete egyenlő, tehát $K_1K = |r_1 - r|$; így a két kör közt belső érintkezés áll fenn. Könnyű látni, hogy csak k tartalmazhatja k_1-et, ugyanis a háromszög belső O pontján átmenő egyenes az AB, AC oldalak legalább egyikét belső pontban metszi, tehát a P és Q pontok legalább egyike k belsejében és k_1 határán van.



KK_1-et az AKK_1 háromszögből fogjuk kiszámítani koszinusz-tétellel. Fel fogjuk használni – a szokásos jelölésekkel élve – a

$$\varrho = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

összefüggést.[2] A $KAK_1\sphericalangle = \delta$ szög meghatározására jegyezzük meg, hogy az ADK egyenlő szárú háromszögből $ADK\sphericalangle = \delta$, így az együttesen félkört kitevő EA, AB, BD íveken rendre δ, γ, $\alpha/2$ nagyságú szögek nyugszanak. Ezek összege tehát 90°, s így $\delta = 90^\circ - (\alpha/2 + \gamma)$. Az AK_1P háromszögből $AK_1 = r_1/\sin(\alpha/2)$. Így[3]

$$KK_1^2 = AK^2 + AK_1^2 - 2AK \cdot AK_1 \cos\delta =$$
$$= r^2 + \frac{r_1^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{2rr_1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right).$$

Ebből levonva $(r - r_1)^2$-t:

$$KK_1^2 - (r - r_1)^2 = \frac{r_1^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{2rr_1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right] =$$
$$= \frac{r_1}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\left[r_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right] =$$
$$= \frac{r_1}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\left(r_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

A zárójelben a kivonandó (1) szerint ϱ. A kisebbítendő átalakítására fogjuk felhasználni azt, hogy P az O-n át AO-ra merőlegesen húzott egyenesen van. Legyen a beírt kör érintési pontja az AB oldalon C'. Ekkor $C'OP$ és OPK_1 a BAD szögre nézve merőleges szárú hegyes szögek, tehát $\alpha/2$ nagyságúak. Így a K_1PO és POC' derékszögű háromszögekből

$$r_1\cos\frac{\alpha}{2} = PO, \quad r_1\cos^2\frac{\alpha}{2} = PO\cos\frac{\alpha}{2} = OC' = \varrho.$$

A felírt különbség értéke tehát valóban 0, amint állítottuk.

Siket Aranka (Makó, József A. g.)

[2]Lásd pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek I. (3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965) 40. o.

[3]Ha $AB = AC$, akkor $\delta = 0$, mert $\alpha/2 + \gamma = 90^\circ$, így az egyenlőség ebben az esetben is helyes.