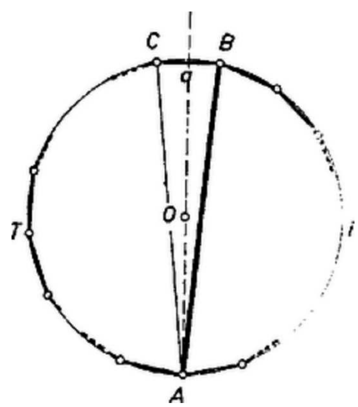
Állapítsuk meg, hány különböző hosszúságú szakaszt feszítenek ki az S szabályos sokszög csúcsai. Elég ehhez S egy kiszemelt A csúcsából a többi n^2+n csúcshoz húzott szakaszokat tekinteni, oldalakat és átlókat, mert S mindig önmagával fedésbe jut, ha O középpontja körül úgy forgatjuk, hogy A helyére egy tetszés szerinti T csúcs jusson, tehát az A-ból és T-ből kiinduló oldalak és átlók páronként egyenlők.

S csúcsainak száma páratlan, hiszen $n(n+1)+1$ alakban írható, és itt a szorzat egyik tényezője páros. Ezért az A-ból kiinduló a szimmetria-tengely a szemben levő BC oldal felezőpontján lép ki S-ből, a tengelyre nem esik S-nek átlója. Így az A-ből kiinduló szakaszok az a-ra szimmetrikus párokat alkotnak, és a párok tagjai egyenlők. Viszont bármely két nem szimmetrikus szakasz különböző, mert az S köré írt körnek legfeljebb 2 pontja van A-tól egy bizonyos távolságban, és ezek a-ra tükrösek. Eszerint az S csúcsai által kifeszített szakaszok között a különböző hosszúak száma fele az S csúcsai számánál 1-gyel kisebb számnak: $(n^2+n)/2=(n+1)n/2$.

Ugyanennyi a P csúcsai által kifeszített összes szakaszok száma, mert az $n+1$ csúcs mindegyike n szakasznak végpontja, és az $(n+1)n$ szorzatban minden szakaszt 2 csúcsnál veszünk számításba. Mivel pedig P csúcsai a feltevés szerint csupa különböző hosszúságú szakaszt feszítenek ki, azért e szakaszok hosszai között S minden szakaszhossza pontosan egyszer lép fel.

Ezek szerint van P-ben egy az S leghosszabb szakaszával, AB-vel egyenlő szakasz, és így feltehetjük, hogy A és B a P csúcsai közé tartoznak, mert ezt a helyzetet – ha kell – P-nek O körüli elforgatásával elérhetjük.

Az állítással ellentétben feltesszük, hogy O nincs a P belsejében, és megmutatjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásban van a feladat feltevésével, tehát tarthatatlan. Ezzel bizonyítást nyer a feladat állítása.



Feltevésünk szerint AB a P-nek oldala, és P minden további csúcsa AB-nek O-t nem tartalmazó partján van, hiszen O benne van az ABC háromszögben, tehát már az AB-n túli első csúcsot hozzávéve P-hez, O benne lenne P-ben. Így P további csúcsai – szám szerint $n-1$ – az S köré írt kör rövidebb $AB=i$ ívén belső pontként helyezkednek el, és egyszersmind S-nek is csúcsai. Mármost i-n van S csúcsai közül – a végpontokat is beszámítva – A és a többi csúcsok fele, számuk $1+(n^2+n)/2$, ezek a csúcsok i-t 1-gyel kevesebb, azaz $(n^2++n)/2$ számú egyenlő ívre darabolják. Ezzel visszavezettük feladatunkat az 1224. feladatra.[1] Ott bebizonyítottuk a következő tételt: ha egy egyenlőközű pontsor pontjai a kezdő és a végpont közé eső egyenesszakaszt $(n^2+n)/2$ szakaszra darabolják, akkor nem lehet úgy kiragadni a pontsor két végpontját és még $n-1$ tetszőleges közbülső pontot, hogy a kiragadott pontok által kifeszített szakaszok mind különbözők legyenek, hacsak $n\geq 4$. Csak azt kell megjegyeznünk, hogy pontsorunk a félkörnél rövidebb AB íven helyezkedik el, és így A, B és az ív kiragadott további $n-1$ osztópont közti ívek nem lehetnek mind különbözők, van köztük legalább két egyenlő. Ezek is kisebbek félkörnél, és mivel egy körnek félkörnél kisebb íveihez tartozó húrjai akkor és csak akkor különbözők, ha maguk az ívek is különbözők, ezért a P csúcsai közti egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak, a feladat feltevésével ellentétben. Ezt akartuk bizonyítani, és ebből – mint előrebocsátottuk – következik a bizonyítandó állítás igaz volta.

Hoffmann György (Budapest, Fazekas M. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Az n^2+n+1 kifejezés értéke $n=3$ esetén 13. Az állítás erre nem igaz, mert a 817. gyakorlat[2] 2. ábrájában a szabályos 13-szög csúcsai közül olyan 4-et sikerült kiválasztani, melyek csupa különböző szakaszt feszítenek ki, de a 13-szög középpontja nincs benne a kiválasztott csúcsokkal meghatározott (konvex) négyszögben. Eszerint szükség volt az állítás mellett az $n\geq 4$ megszorításra. Hasonlóan az 1224. feladat felhasznált tétele sem érvényes $n=3$ esetén.

[1] K. M. L. 27 (1963/12) 202. o.
[2] K. M. L. 27 (1963/12) 213. o.