$a)$ c^2-1 négyzetgyöke kisebb c-nél, de nagyobb $c-1$-nél

$$c-1<\sqrt{c^2-1}<c, \tag{2}$$

ugyanis természetes szám négyzeténél 1-gyel kisebb szám nem teljes négyzet, kivéve $c=1$ esetét, ekkor viszont az érdektelen $\sqrt{0}$ esetre jutunk. Ezt kizárva a $\sqrt{c^2-1}-(c-1)$ különbség 1-nél kisebb pozitív szám, és reciprokának egész része lesz a lánctört–kifejtés első nevezőjének első tagja. Ez 1, ugyanis

$$\frac{1}{\sqrt{c^2-1}-(c-1)}=\frac{\sqrt{c^2-1}+(c-1)}{2(c-1)}, \tag{3}$$

és itt a számláló (2) szerint nagyobb a nevezőnél, de nem éri el a nevező 2-szeresét. Ezért

$$\sqrt{c^2-1}-(c-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{c^2-1}-(c-1)}{2(c-1)}}.$$

A nevező második tagjának reciproka (3)-nak $2(c-1)$-szerese, így nagyobb, mint $2(c-1)$, másrészt kisebb az 1-gyel nagyobb számnál:

$$\frac{2(c-1)}{\sqrt{c^2-1}-(c-1)}=\sqrt{c^2-1}+(c-1)<2c-1,$$

ezért

$$\sqrt{c^2-1}-(c-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(c-1)+\left[\sqrt{c^2-1}-(c-1)\right]}}$$

A maradék megegyezik a bal oldallal, ezért váltakozva vég nélkül az 1 és a $2(c-1)$ rész-nevezők ismétlődnek:

$$\sqrt{c^2-1}=(c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(c-1)+\dots}}}}. \tag{4}$$

A további két kifejtendő négyzetgyök c és $c+1$ közé esik:

$$c<\sqrt{c^2+1}<c+1, \quad c<\sqrt{c^2+c}<\sqrt{c^2+2c+1}=c+1. \tag{5}$$

Hasonló számítással kapjuk, hogy az elsőben egyetlen rész–nevező ismétlődik: $2c$, a másodikban ismét kettő: 2 és $2c$, ugyanis

$$\sqrt{c^2+1}-c=\frac{1}{\sqrt{c^2+1}+c}=\frac{1}{c2+\left[\sqrt{c^2+1}-c\right]},$$

$$\sqrt{c^2+1}=c+\cfrac{1}{2c+\cfrac{1}{2c+\cfrac{1}{2c+\dots}}}$$

illetőleg

$$\sqrt{c^2+c}-c=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{c^2+c}+c}{c}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{c^2+c}-c}{c}}=$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{c^2+c}+c}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2c+\left[\sqrt{c^2+c}-c\right]}},$$

$$\sqrt{c^2+c}=c+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2c+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2c+\dots}}}}. \tag{6}$$

A negyedik gyökjel alatt $(c+1)^2-1$ áll, ezért a négyzetgyök lánctört kifejtését (4)-ből kaphatjuk, c helyére mindenütt $c+1$-et írva:

$$\sqrt{c^2+2c}=c+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2c+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2c+\ldots}}}}.$$

b) Az (1) alakú kifejtésben a_i gyanánt $(i=0,1,2,\ldots)$ mindig a nagyobbat kell vennünk a közül a két szomszédos egész szám közül, amely a négyzetyököt, ill. a negatív maradéktag reciprokát közrefogja. Így (5) alapján

$$\sqrt{c^2+c}-(c+1)=-\left[c+1-\sqrt{c^2+c}\right]=$$

$$=-\cfrac{1}{\cfrac{c+1+\sqrt{c^2+c}}{c+1}}=-\cfrac{1}{2-\cfrac{c+1-\sqrt{c^2+c}}{c+1}},$$

$$=-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{c+1+\sqrt{c^2+c}}}=-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2(c+1)-\left[c+1-\sqrt{c^2+c}\right]}},$$

$$\sqrt{c^2+c}=c+1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2(c+1)-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2(c+1)-\ldots}}}}. \tag{7}$$

Mármost (6)-ból és (7)-ből $c=3$-mal és $c=4$-gyel

$$\sqrt{12}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\ldots}}}},\quad \sqrt{20}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\ldots}}}},$$

$$\sqrt{12}=4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{8-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{8-\ldots}}}},\quad \sqrt{20}=5-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{10-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{10-\ldots}}}}.$$

Négy-négy közelítő törtjük közül a páratlan sorszámúak megegyeznek, a páros sorszámúak különbözők:

$$\frac{7}{2},\ \frac{45}{13},\ \frac{97}{28},\ \frac{627}{181},\ \ldots,\quad \text{és}\quad \frac{9}{2},\ \frac{76}{17},\ \frac{161}{36},\ \frac{1364}{305},\ \ldots$$

$$\frac{7}{2},\ \frac{52}{15},\ \frac{97}{28},\ \frac{724}{209},\ \ldots,\quad \text{és}\quad \frac{9}{2},\ \frac{85}{19},\ \frac{161}{36},\ \frac{1525}{341},\ \ldots$$

Sófalvi Mihály (Budapest, Bláthy O. erősáramú ip.t. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy az utolsó részben talált megegyezések a további közelítő törtek között is (és általában is) fennállanak minden 1-nél nagyobb c egész szám esetén.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak, g. II. o. t.)

2. Többen nem keresték meg az egyes nevezőket közrefogó egész számokat, hanem bizonyos azonosságokra hivatkozva „gépiesen” végezték a kifejtést. A meggondolás lényegének figyelmen kívül hagyása ez esetben is sok hibára vezetett.