Megpróbáljuk összeállítani egy konvex poliéder modelljét 2 négyzetlapból és szabályos ötszöglapokból, és be fogjuk látni, hogy ez nem lehetséges. Először megállapítjuk a felhasználható ötszöglapok számát.

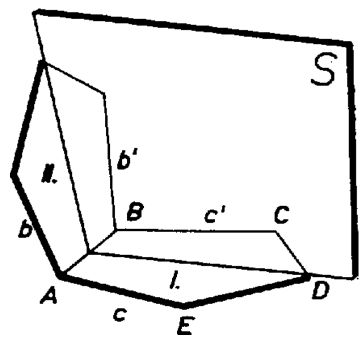
A poliéder bármelyik csúcsába összefutó lapoknak az illető csúcsnál levő szögei együttvéve nem érhetik el a 360°-ot, különben ugyanis a poliéder nem lenne konvex. Ezért minden csúcsban csak 3–3 lap futhat össze, mert a szabályos ötszög egy szöge 108°, tompaszög, és így 4 lapot tartalmazó csúcsban a szögek összege nagyobb volna négy derékszögnél.

Legyen az ötszöglapok száma x. Így a modell céljára előkészített, különálló lapokon az oldalak és a csúcsok száma egyaranánt $x \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 5x + 8$, és ezek összeállítva $(5x+8)/2$ élt és $(5x+8)/3$ csúcsot adnak, mert a poliéder minden élét két lap 1–1 oldala alkotja, és minden csúcsában 3 lapcsúcs egyesül. Így az 1216., ill. az 1175. feladatból)[1] ismert EULER–féle poliédertételt felhasználva, amely szerint konvex poliéderen a lapok és a csúcsok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál:

$$x + 2 + \frac{5x+8}{3} = \frac{5x+8}{2} + 2,$$

ugyanis a lapok száma $x + 2$. Innen $x = 8$, tehát ha létezik a kérdéses poliéder, akkor ötszöglapjainak száma 8.

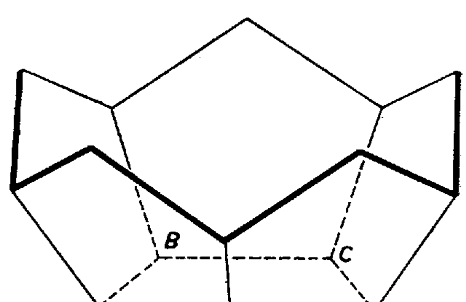
Ezzel azt is kaptuk, hogy a poliéder csúcsainak száma csak 16 lehet. Közülük legfeljebb 8-ba futhat be négyzetcsúcs, van tehát olyan csúcs, amelyben mind a három lap szabályos ötszög. Nevezzük az ilyeneket α-típusú csúcsoknak, és kezdjük az összeállítást egy ilyennel. Könnyű belátni, hogy α-típusú csúcs szomszédos csúcsai ugyancsak α–típusúak. Legyen ugyanis AB a poliéder egy olyan éle, melyet két ötszöglap alkot (1. ábra I. és II.).



1. ábra

E két lap alakzata szimmetrikus az AB él S felező merőleges síkjára (a lapok közti szög bármely értéke mellett). Ha tehát az A csúcsban a harmadik lap szabályos ötszög, vagyis a b, c élek közti szög 108°, akkor ugyanekkora a b', c' élek közti szög is, tehát a B-beli harmadik lap is szabályos ötszög, a B csúcs α–típusú, amint állítottuk.

Így pedig α–típusú lesz a poliédernek az I. ötszög C csúcsából adódó csúcsa, majd a D-ből adódó is, és D-be a harmadik ötszöglapot beillesztve E-ben is 3 ötszöglap fut össze. E 6 ötszöglap alakzatán (2. ábra) további 5 olyan csúcs van, amelyben már 2 lap fut össze, mindegyikük szomszédos a modell egy már elkészült csúcsával, tehát csak α–típusúvá egészíthető ki.



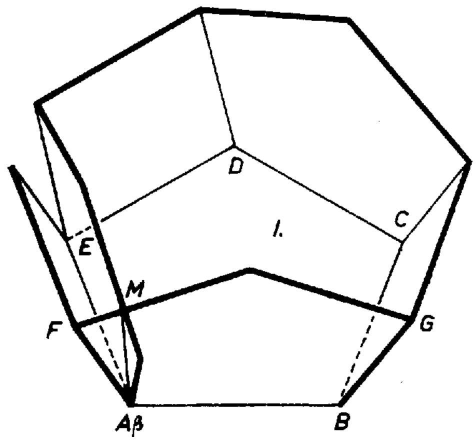
2. ábra

Eszerint az összeállítás egyedül lehetségesnek talált folytatásához egyrészt a megengedettnél több ötszöglapra lenne szükség, másrészt nem nyílik lehetőség az előírt 2 négyzetlap beillesztésére. Így a kérdéses poliéder valóban nem létezik.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

Megjegyzés. Kissé másképpen jutunk ellentmondásra az összeállításban a következő úton. A két négyzetnek csak 2 közös csúcsa lehet, kellene tehát lennie olyan csúcsnak, amelyben 1 négyzet és 2 ötszög fut össze (β–típusú csúcs), legyen ilyen a 3. ábra A csúcsa, ahol EAF derékszög.

[1] K. M. L. 27 (1963) 117. o., ill. 25 (1962) 134. o.

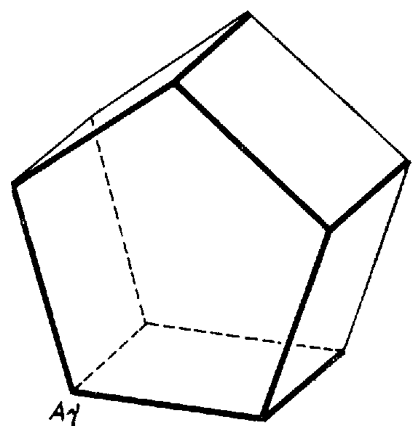


3. ábra

Ekkor viszont a szimmetria miatt B is β–típusú csúcs, CBG derékszög, az I. ötszöghöz a BC élen is négyzet csatlakozik, ezért a CD-n ismét csak ötszög, DE-n ismét csak négyzet, végül EA-n ismét csak ötszög csatlakozhat, holott abból indultunk ki, hogy itt négyzet csatlakozik.

Bense Imre (Esztergom, Temesvári P. G. IV. o. t.)

2. Az sem lehetséges, hogy a poliéder egy csúcsában 2 négyzet és 1 szabályos ötszög fusson össze (γ–típusú csúcs), mert így az ötszög síkja merőleges a négyzetek közös élére, ugyanígy az ezen él másik végpontjában csatlakozó ötszöglap síkja is, tehát e két ötszöglap síkjai párhuzamosak, úgyszintén további oldalaik is páronként (4. ábra).



4. ábra

Így az összeállítás csak további négyzetlapokkal folytatható, amit a feladat nem enged meg.

Ajtai Miklós (Budapest, Rákóczi F. G. IV. o. t.)