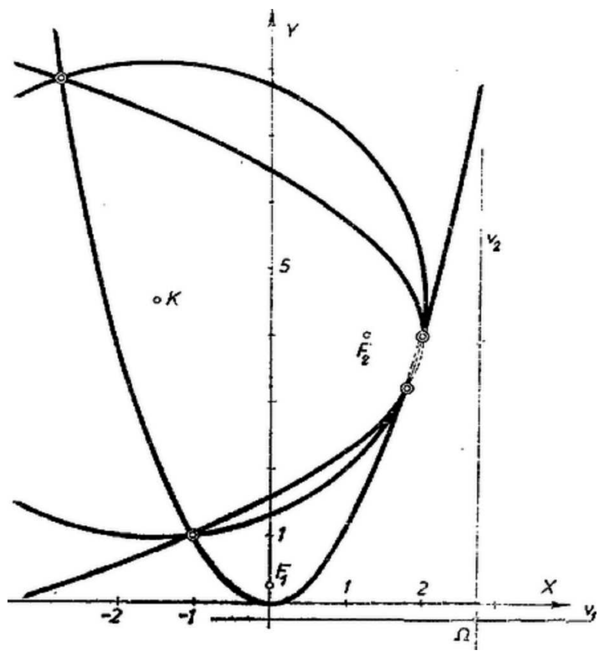

I. Először megmutatjuk, hogy az (1) és (2) paraboláknak 4 különböző közös pontjuk van. A közös pontok x, y koordinátáit a két parabola egyenletének összekapcsolásával nyert egyenletrendszer megoldásai adják. y-nak (1)-beli kifejezését (2)-be helyettesítve a közös pontok abszcisszáira a következő egyenletet kapjuk:

$$3(x-2)+(x^2-4)^2=x^4-8x^2+3x+10=0. \tag{3}$$

Vizsgáljuk meg, van-e ennek egész gyöke. Ismeretes, hogy egész együtthatós egyenlet egész gyöke csak az állandó tag osztója lehet. 10 osztói: ±1, ±2, ±5 és ±10; közülük $x_1=-1$ és $x_2=2$ kielégítik az egyenletet. A megfelelő $x+1$ és $x-2$ gyöktényezők szorzatát a bal oldalból kiemelve a visszamaradó tényező x^2+x-5, tehát a további gyököket az

$$x^2+x-5=0 \tag{4}$$

egyenletből kapjuk. Ennek gyökei valósak és különbözők, mert a diszkrimináns pozitív szám: 21. x_1 és x_2 nem gyökei (4)-nek, ezért (3)-nak négy különböző valós gyöke van.

(1) szerint a megfelelő ordináták is valósak, tehát az (1) és (2) parabolák egymást valóban négy különböző pontban metszik.

A kívánt bizonyításhoz elég megmutatni, hogy van olyan valós kör, melynek egyenletét a metszéspontok koordinátái kielégítik. Írjuk (1)-et így:

$$x^2-y=0, \tag{1a}$$

és adjuk hozzá (2)-höz. Kellő rendezés után

$$x^2+3x+y^2-9y+10=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{25}{2}=0. \tag{5}$$

Ez kör egyenlete, középpontja a $(-3/2;\,9/2)$ pont, és sugara $5/\sqrt{2}$ egységnyi. Másrészt a metszéspontok mindegyike kielégíti (5)-öt, mert bármelyik metszéspont koordinátáit helyettesítve mind (1a), mind (2) bal oldalának értéke 0, tehát az összeadással kapott (5) bal oldalának értéke is 0.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Mint látjuk, nem volt szükség a metszéspontok koordinátáinak kiszámítására és behelyettesítésére.

II. Legyen adva két egymásra merőleges tengelyű parabola. Válasszuk X és Y tengelyeknek az első, ill. a második parabola vezéregyenesét, és legyenek a két fókusz koordinátái $F_1(a_1,\,b_1)$, ill. $F_2(a_2,\,b_2)$. Így a parabolák csúcsa az $(a_1,\,b_1/2)$, ill. az $(a_2/2,\,b_2)$ pont, paramétere b_1, ill. a_2 abszolut értéke, egyenletük:

$$(x-a_1)^2-2b_1\left(y-\frac{b_1}{2}\right)=0, \quad \text{ill.} \quad (y-b_2)^2-2a_2\left(x-\frac{a_2}{2}\right)=0.$$

A két parabola közös pontjai mindkét egyenletet kielégítik, tehát kielégítik az ezekből összeadással és rendezéssel adódó

$$(x-a_1-a_2)^2+(y-b_1-b_2)^2-2(a_1a_2+b_1b_2)=0 \tag{6}$$

egyenletet is. Ez kör egyenlete, ha a harmadik tag negatív, vagyis $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$, és ekkor K középpontja az $(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$ pont, sugara $r = \sqrt{2(a_1a_2 + b_1b_2)}$ egység; tehát amennyiben a paraboláknak 4 (különböző) közös pontjuk van, azok a (6) körön vannak, és így valóban egy húrnégyszög csúcsait adják. Ha pedig $a_1a_2 + b_1b_2 \leq 0$, akkor nincs a (6)-ot kielégítő pont, ill. egyenlőség esetén egyetlenegy ilyen van, tehát a paraboláknak legfeljebb 1 közös pontjuk van – a feltevéssel ellentétben.

Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A K középpont koordinátáiból látható, hogy az F_1OF_2K négyszög paralelogramma. A koordinátarendszert az ábráról elhagyva O-t a két vezéregyenes metszéspontja adja meg.