Tegyük fel, hogy az x, y, z, u egész számok – amelyek között van 0-tól különböző is –, kielégítik az

$$x^2+y^2+z^2=u^2 \tag{1}$$

egyenletet, és keressük az olyan 0-tól különböző d egész számokat, amelyekkel teljesül

$$(x+d)^2+(y+d)^2+(z+d)^2=(u+d)^2. \tag{2}$$

Innen a feltevések figyelembevételével

$$d=u-x-y-z, \tag{3}$$

feltéve, hogy ez az (egész) szám 0-tól különböző. Eszerint általában van ilyen szám, éspedig általában több is, mert (1) egy megoldása helyébe a negatívját véve is megoldást kapunk, és ez a változtatás (3)-ban újabb d értékre vezet, amennyiben nem 0-t ad.

Az adott egyenlőség szerint $x=y=0$, $z=\pm1$, és $u=\pm1$. Az előjeleket variálva (3)-ból a $z=u$ esetekben az érdektelen $d=0$-t kapjuk, a $z=-u=1$ esetben $d=-2$-t, $z=-u=-1$ esetén pedig $d=2$-t, azonban a (2) számára így adódó

$$-2,\ -2,\ -1,\ -3 \text{ és } 2,\ 2,\ 1,\ 3$$

új megoldások nem lényegesen különbözők. A 806. gyakorlat egyenletéhez hasonlóan általában is (2) egy talált megoldásának negatívját kapjuk, ha x, y, z, u mindegyike helyett a (-1)-szeresét vesszük, – ezért u-t nem vesszük negatívnak. A 2, 2, 1, 3 megoldás előjel variációi közül elég az első két szám 2, -2, és -2, 2 választásának csak az egyikét venni, pl. az elsőt, mert a másik nem ad újabb d értéket. Az így maradó 6 variáció közül az első a kiindulási megoldásra vezet vissza, a másodikban $d=0$, a harmadikban egy 0 tag lép fel, az utolsó három viszont egy-egy új megoldást ad:

x	y	z	u	d	$x+d$	$y+d$	$z+d$	$u+d$
2	2	1	3	-2	0	0	-1	1
2	2	-1	3	0	–	–	–	–
2	-2	1	3	2	4	0	3	5
2	-2	-1	3	4	6	2	3	7
-2	-2	1	3	6	4	4	7	9
-2	-2	-1	3	8	6	6	7	11

Valóban

$$2^2+3^2+6^2=7^2, \quad 4^2+4^2+7^2=9^2, \quad 6^2+6^2+7^2=11^2.$$

Pomozi István (Szentendre, Móricz Zs. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Néhány dolgozat megkereste (1) bal oldalán csak 2 tagot növelve az $(x+d)^2+(y+d)^2+z^2=(u+d)^2$ egyenletből adódó megoldásokat is. Hosszabb számítással a fentieken és a 806. gyakorlat*[1] egy 0 taggal kiegészített megoldásain felül a következőket kapták:

$$1^2+\ 4^2+\ 8^2=9^2, \qquad 1^2+12^2+12^2=17^2,$$
$$3^2+14^2+18^2=23^2, \qquad 4^2+13^2+16^2=21^2.$$

2. Az $x_1^2+x_2^2+\ \ldots\ +x_n^2=y^2$ egyenlet egész megoldásaiból $(x_1+d)^2+\ \ldots\ +(x_n+d)^2=(y+d)^2$ alakú megoldásokat keresve hasonlóan

$$d=\frac{2}{n-1}(y-x_1-x_2-\ \ldots\ -x_n),$$

ami általában nem egész, de racionális szám. Eszerint a hasonlóan képezett új racionális megoldásokat $n-1$-gyel szorozva új, egész megoldásokat kapunk.

Deák István (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)

[1] 1963/9 24–25. old.