I. Sanyi állítása páros számokról szól és három részállításból tevődik össze. Vizsgáljuk először ezeket. A páros számot jelöljük $2k$-val (k egész).

α) Az első részállítás $2k$ két olyan összeadandóra bontására vonatkozik, amelyek szorzata négyzetszám. Ilyen mindig található: $2k = k + k$, és az összeadandók szorzata $k^2 = |k|^2$. Ha azonban a 0-t nem engedjük meg mint összeadandót, akkor a 0 nem állítható elő a kívánt módon, mert két 0-tól különböző összeadandóra bontva az egyik a másik negatívja lesz, így szorzatuk negatív.

β) A második részállítás a $2k$-nak olyan egész számok különbségeként való írásáról szól, amelyek szorzata négyzetszám. A kisebbítendőt d-vel jelölve a kivonandó $d - 2k$, így a $d \cdot (d - 2k) = e^2$ követelményből (ahol d és e egész szám) $d = k \pm \sqrt{k^2 + e^2}$. Itt $e \neq 0$, mert különben d és $d - 2k$ közül az egyik 0 volna. Ha $k = 0$, nyilván bármilyen 0-tól különböző egész megfelel d-nek. Ha $k \neq 0$, akkor $k^2 + e^2 = f^2$ kell hogy legyen valamilyen f egész számmal. Innen $k^2 = f^2 - e^2 = (f + e)(f - e)$. Itt $f + e$ és $f - e (= f + e - 2e)$ vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Így k^2-et két egymástól különböző és egyező párosságú tényezőre kell bontani. Ez lehetséges, mert ha k páros, akkor k^2 osztható 4-gyel, csak $k = \pm 1$ és ± 2 esetén nincs más, mint az egyenlő tényezőkből álló $1 = 1 \cdot 1 = (-1)(-1)$, ill. $4 = 2 \cdot 2 = (-2)(-2)$ felbontás.

Ha $k^2 = u \cdot v$ egy kívánt alakú felbontás, akkor $f = (u + v)/2$, $e = (u - v)/2$, egészek, mert u és v egyező párosságú, $f^2 - e^2 = uv = k^2$, és pl. $d = k + f$, $d - 2k = f - k$ szorzata $d(d - 2k) = f^2 - k^2 = e^2$. Így a ± 2, ± 4 számok kivételével minden páros számhoz létezik β típusú felbontás is.

γ) A harmadik részállítás $2k$-nak olyan egész számok különbségeként való írásáról szól, amelyek szorzata egy négyzetszám (-1)-szerese. Ha b és c ilyen egészek: $2k = b - c$, ahol $bc = -e^2$, akkor $2k = b + (-c)$ és $b(-c) = -bc = e^2$. Ha tehát van γ típusú előállítás, akkor van egész összeadandókból álló α típusú felbontás is, és ugyanígy, ha van egész összeadandókból álló α típusú felbontás, abból azonnal nyerhető egy γ típusú felbontás is. Ezzel egyszersmind beláttuk, hogy minden 0-tól különböző páros számnak van γ típusú felbontása is.

II. Az utolsó megjegyzés szerint Sanyi állításának harmadik része fölösleges, hiszen ha az első állítás nem teljesül, akkor a harmadik sem, és megfordítva. Nem derül ki az sem, hogy a 0-t megengedi-e Sanyi összeadandónak, ill. kivonandónak, vagy sem. Ez a probléma kiküszöbölhető azzal is, ha négyzetszámon pozitív egész négyzetét értjük. Célszerű azonban ezt is kifejezésre juttatni. Feleslegesen gyengíti az állítást a „ ... ha pedig így nem bontható, ...” fogalmazás is, hiszen a β (vagy γ) állítást ezzel az α alóli egyetlen kivételre, a 0-ra korlátozza, holott láttuk, hogy az is érvényes véges számú kivétellel minden páros számra, és ez a többet mondó állítás, hiszen α teljesen magától értetődő módon teljesül. Nem egyértelmű a vagy ... , vagy ... használata sem az állítás második részében, mert jelentheti azt is, hogy vagy az egyik állítás vagy a másik igaz, de nem mind a kettő („kizáró vagy”), de azt is, hogy vagy az egyik állítás igaz, vagy a másik, vagy mind a kettő, („megengedő vagy”). Ha azonban a γ állítást elhagyjuk, ez a probléma is elesik.

Mindezek alapján Sanyi állítása helyett pl. a következő szabatosabb és többet mondó állítást fogalmazhatjuk meg: „Minden páros szám, véges sok kivételtől (ti. a 0, ± 2, ± 4-től) eltekintve, előállítható két egész szám összegeként is és két egész szám különbségeként is úgy, hogy e két szám szorzata pozitív négyzetszám legyen; amelyik páros szám nem állítható elő az egyik módon, előállítható a másik módon.”

III. Még mindig kérdéses marad, érdemes-e a második részállításhoz való hasonlósága ellenére is említeni a teljesen magától értetődő első részt. Lehet, hogy Tóni arra is gondolt, hogy itt az összeadandókról kössük ki, hogy különböző egész számok. Megjegyezzük, hogy ha az összeadandók egész voltát nem kívánjuk meg – ahogy Sanyi sem követelte meg állítása α részében –, akkor az $a + b = 2k$, $ab = e^2$ egyenletrendszer gyökei, vagyis az $x^2 - 2kx + e^2 = 0$ egyenlet két gyöke, a $k \pm \sqrt{k^2 - e^2}$ számok mindig megfelelnek, [1] hacsak $e < k$, és egész szám. Ha azonban az összeadandók egész voltát is megkívánjuk, akkor itt valamilyen egész f-fel $k^2 - e^2 = f^2$ kell hogy legyen, és $f \neq 0$, mert különben két egyenlő összeadandót kapnánk. Így $k^2 = e^2 + f^2$ kell hogy fennálljon, ahol e és f 0-tól különböző egész.

Ismeretes,[2] hogy ha két négyzetszám összege osztható egy $4j + 3$ alakú p prímszámmal, akkor mindkét négyzetszám alapja is osztható p-vel. Könnyű látni azt is, hogy ha két négyzetszám összege osztható 4-gyel, akkor az alapok párosak. Valóban, ha az egyik alap páros, a másik páratlan, akkor négyzeteik összege páratlan, ha pedig mindkét alap páratlan, mivel páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, a négyzetösszeg páros, de nem osztható 4-gyel. Így *két 0-tól különböző, egymáshoz relatív prím szám négyzetének az összege, csupa $4j + 1$ alakú prím szorzata, vagy egy ilyen szorzat kétszerese.*

A fenti kérdésre visszatérve, ha $e \neq 0$, $f \neq 0$, és legnagyobb közös osztójuk d, azaz $e = de_1$, $f = df_1$, ahol e_1 és f_1 relatív prímek, akkor $e^2 + f^2 = d^2(e_1^2 + f_1^2)$, és itt a zárójelben álló összeg $4j + 1$ alakú prímek szorzata vagy egy ilyen szorzat kétszerese. Ha ez a négyzetösszeg a k^2 négyzetszámmal egyenlő, akkor az utóbbi eset nem fordulhat elő. Ezek szerint, ha k-nak nincs $4j + 1$ alakú prímszám osztója, akkor nem bontható fel két pozitív négyzetszám összegére, és akkor $2k$ sem bontható fel olyan különböző egész számok összegére, amelyek szorzata négyzetszám. Belátható, hogy a többi esetekben a kívánt felbontások mindig léteznek.

Összeállítva a következők dolgozataiból, kiegészítésekkel:
Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
Huhn András (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

---

[1] Több dolgozat helyesen rámutatott arra, hogy ha páros (vagy akár páratlan) számot két tört összegére bontunk, ezek szorzata nem egész, és így nem is négyzetszám; nem gondoltak azonban irracionális felbontásra.

[2] Lásd pl. *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek II. rész (Középiskolai Szakköri Füzetek; Tankönyvkiadó, Budapest, 1965) 61. old.

Körner János (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)