1. Helyettesítsük be K-ba d helyére az adott kifejezést. Ehhez

$$\begin{aligned} d^2 &= (a+b-c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = \\ &= (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc). \end{aligned} \tag{1}$$

azaz háromtagú kifejezés négyzetét megkapjuk, ha a tagok négyzetösszegéhez hozzáadjuk a tagok minden lehetséges párosításával képezett két–tényezős szorzatok összegének 2-szeresét. – (1) felhasználásával átalakítjuk K ama 4 tagjának K_1 összegét, amelyekben d legalább második hatványon szerepel:

$$\begin{gathered} K_1 = 2(a^2+b^2+c^2)d^2 - d^4 = d^2\left[2(a^2+b^2+c^2) - d^2\right] = \\ = \left[(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc)\right]\left[(a^2+b^2+c^2) - \right. \\ \left. -2(ab+ac+bc)\right] = (a^2+b^2+c^2)^2 - 4(ab+ac+bc)^2. \end{gathered}$$

Alkalmazzuk e két négyzetre fenti megállapításunkat, (1)-ben a, b, c helyére előbb rendre a^2-et, b^2-et, c^2-et, majd ab-t, ac-t, bc-t írva:

$$\begin{gathered} K_1 = (a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - \\ -4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 8(a^2bc+b^2ac+c^2ab). \end{gathered}$$

Az utolsó zárójelben kiemelés után $a+b+c$ helyére d-t visszaírva

$$K_1 = (a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 8abcd.$$

Hozzáadva ehhez K további tagjait, a kívánt esetre $K=0$ adódik.

2. a-t, b-t és c-t állandóknak, d-t változónak tekintve K a d-nek negyedfokú polinomja, másrészt eredményünk szerint $d=a+b+c$ e polinom 0-helye. Így K felírható a

$$d-a-b-c \tag{2}$$

gyöktényezőnek és d egy harmadfokú polinomjának szorzataként.[1]

a-t, b-t, c-t is változóknak tekintve K a négy változónak ún. szimmetrikus polinomja, vagyis pl. minden a helyére b-t, minden b helyére c-t, minden c helyére d-t és minden d helyére a-t írva önmagába megy át. Eszerint tekinthetjük K-t csak a, csak b vagy csak c polinomjának, és az

$$a=b+c+d, \quad b=c+d+a, \quad c=d+a+b$$

helyettesítésekkel ugyancsak $K=0$ adódik. Így K további 3 módon írható szorzat gyanánt, egyik tényezőnek sorra az

$$a-b-c-d, \quad b-c-d-a, \quad c-d-a-b \tag{3}$$

kifejezést véve.

Az $a=b+c+d$ esetben a (2) tényező $-2(b+c)$, nem 0, hacsak $b+c\neq 0$, így a (2) kiemelése után maradó tényező lesz 0, tehát abból emelhető ki a (3) alatti első tényező. Hasonlóan haladva tovább, látható, hogy K keresett szorzat alakjában mind a négy tényező fellép. Ezeken kívül már csak egy a, b, c, d-től független, állandó λ tényező szerepelhet a szorzatban, mert a (2) és (3) tényezők szorzata negyedfokú, és K is negyedfokú, tehát

$$K = \lambda(d-a-b-c)(a-b-c-d)(b-c-d-a)(c-d-a-b). \tag{4}$$

Helyettesítsünk λ meghatározása céljára a kifejezés eredeti és új alakjában egy határozott a, b, c, d értékrendszert, legyen pl. $a=b=c=d=1$. Ekkor a $16=\lambda(-2)^4$ egyenlőségből $\lambda=1$.

Tetszetősebb (4)-et így írni:

$$K = (b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d), \tag{5}$$

vagy

$$a+b+c+d=2s$$

jelöléssel, amikor pl. az első tényező $2s-2a=2(s-a)$ alakban írható:

$$K = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d). \tag{6}$$

Szántó Ottó (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. III. o. t.)

[1] Lásd pl. *Surányi János:* Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961/11) 103–105. o.

Megjegyzések. **1.** K szorzat–alakjához abból is eljuthatunk, ha észrevesszük, hogy K negatívjának több tagja megegyezik

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$

kifejtésével, és hogy az utóbbiból $(-K)$-t kivonva ugyancsak teljes négyzet adódik:

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+K=4a^2b^2+4c^2d^2+8bcd=(2ab+2cd)^2.$$

Eszerint K, mint két négyzet különbsége, szorzattá alakítható. Az alapok összege és különbsége ismét két–két négyzet különbségeként írható:

$$\begin{gathered}
2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2=(a+b)^2-(c+d)^2= \\
=(a+b+c-d)(a+b-c+d), \\
2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2=(c+d)^2-(a-b)^2= \\
=(c+d+a-b)(c+d-a+b),
\end{gathered}$$

így közvetlenül kapjuk (5)-öt.

Csörnyei Zoltán (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)

2. A vizsgált kifejezés szerepelt az 1145. feladatban[2], mint az a, b, c, d oldalakkal körülhatárolható legnagyobb területű négyszög területe négyzetének 16-szorosa: $K=16\,t_{\max}^2$. Azt is láttuk, hogy ha az a, b, c, d oldalakból lehet négyszöget szerkeszteni, akkor a legnagyobb területű négyszög húrnégyszög. Így ennek t területe

$$t=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

ahol $s=(a+b+c+d)/2$.

[2] K. M. L. 25 (1962/11) 107. o.