I. megoldás. *a)* A 64 jegyű számok 10^{63} és 10^{64} közé esnek, az alsó határt is megengedve. Ezért, ha a kérdéses n szám léteznék, akkor teljesülne rá:

$$10^{63} \le n^{58} < 10^{64}. \tag{1}$$

Mindhárom szám 10-es alapú logaritmusát véve, majd 58-cal (vagyis pozitív számmal) osztva

$$\frac{63}{58} \le \lg n < \frac{64}{58}, \tag{2}$$

mert 1-nél nagyobb logaritmus alapszám esetén nagyobb szám logaritmusa nagyobb. Írjuk (2)-t tizedes tört alakban, tízezredrészekre kerekítve, éspedig az alsó korlát esetében lefelé, a felső korlát esetében fölfelé:

$$1{,}0862 < \lg n < 1{,}1035.$$

Ennek azonban egész szám nem tesz eleget, mert az alsó korlát nagyobb, mint 12,1 logaritmusa, a felső korlát pedig kisebb, mint 12,7 logaritmusa, és e két szám között nincs egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

b) Az *a)* rész meggondolásához hasonlóan akkor nincs k jegyű 58. hatvány, ha a

$$\frac{k-1}{58} \le x < \frac{k}{58} \tag{3}$$

számközbe egy természetes szám logaritmusa sem esik. Ez esetben ez az 1/58 hosszúságú intervallum két szomszédos természetes szám logaritmusa közt van, így azok különbsége nagyobb, mint 1/58. A logaritmus görbét nézte azonban azt várjuk, hogy elég nagy természetes számokra két szomszédos természetes szám logaritmusa mindig 1/58-nál kevesebbel különbözik. Ezt be is fogjuk bizonyítani. A szóban forgó

$$d(n) = \lg(n+1) - \lg n = \lg\frac{n+1}{n} = \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

különbség n növekedésével csökken, mert $1+\dfrac{1}{n}$ csökken, és kisebb szám logaritmusa kisebb. Keressük, milyen n-ekre lesz 1/58-nál kisebb. Ez biztosan teljesül, ha az 1/58-nál kisebb 0,0172-nél is kisebb:

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0{,}0172, \qquad 1+\frac{1}{n} < 10^{0{,}0172}, \qquad n > \frac{1}{10^{0{,}0172}-1}.$$

A jobb oldali szám kisebb, mint 25, mert

$$10^{0{,}0172} > 1{,}040, \qquad \text{így} \qquad \frac{1}{10^{0{,}0172}-1} < \frac{1}{0{,}04} = 25.$$

Eszerint csak 25-nél kisebb szám és a rákövetkezője közé eshet (3) alakú intervallum, annak felső határa tehát nem nagyobb, mint $\lg 25$.

$$\frac{k}{58} \le \lg 25, \qquad k \le 58\lg 25 < 58\cdot 1{,}398 < 81{,}1,$$

így k legfeljebb 81 lehet, ennél nagyobb szám tehát nem írható 64 helyébe.

Nagy Péter Tibor (Kiskunhalas, Szilády Á. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megfordítva megadhatjuk, hány 1-nél nagyobb egész szám felel meg az *a)* állításban 64 helyén. (3)-ban $k = 1, 2, \ldots, 81$-et véve a 81 intervallumba csak az $1, 2, 3, \ldots, 24$ egész számok logaritmusai esnek ($\lg 1$ a $k = 1$-gyel adódó intervallum bal végpontjába). Mindegyik logaritmus más intervallumba esik, mert még $\lg 25 - \lg 24 < 1{,}3980 - 1{,}3801 = 0{,}0179 > 1/58$. Eszerint $81 - 24 = 57$ intervallumba nem esik logaritmus, az ezekhez tartozó és a 64-től különböző k értékeket téve 64 helyére, az állítás helyes marad.

2. Több dolgozatról az látszik, hogy a versenyző összetévesztette az „akárhány” és a „bármely” szavakat.

II. megoldás. A feladat állítása úgy is fogalmazható, hogy van olyan n természetes szám, amelynek az 58. hatványa legfeljebb 63 jegyű, de a rá következő $n+1$-nek az 58. hatványa már legalább 65 jegyű, azaz

$$n^{58} < 10^{63}, \quad (n+1)^{58} \ge 10^{64}.$$

Mindkét egyenlőtlenséget n-re megoldva ez azt jelenti, hogy olyan természetes szám létezését kell belátnunk, amelyre

$$10^{\frac{64}{58}} - 1 \le n < 10^{\frac{63}{58}}.$$

A bal oldali számérték kisebb, mint 11,7, a jobb oldali viszont nagyobb, mint 12,1, így a keresett n szám 12. Ennek 58. hatványa kisebb, mint $4\cdot 10^{62}$, tehát legfeljebb 63 jegyű, viszont 13-nak az 58. hatványa nagyobb, mint $4\cdot 10^{64}$, tehát legalább 65 jegyű. Valóban nincs tehát olyan természetes szám, amelyiknek az 58. hatványa 64 jegyű lenne.

Általában 64 helyett azokra a k számjegyszámokra igaz, hogy nincs olyan természetes szám, amelynek az 58. hatványa k-jegyű, amelyekhez van olyan n természetes szám, hogy

$$n^{58} < 10^{k-1}, \qquad (n+1)^{58} \geq 10^k,$$

azaz

$$10^{\frac{k}{58}} - 1 \leq n < 10^{\frac{k-1}{58}}.$$

Ilyen n létezéséhez mindenesetre szükséges, hogy az alsó korlát kisebb legyen a felsőnél, azaz teljesüljön

$$10^{\frac{k}{58}} - 1 < 10^{\frac{k-1}{58}},$$

$$10^{\frac{k}{58}} - 10^{\frac{k-1}{58}} = 10^{\frac{k-1}{58}}\left(10^{\frac{1}{58}} - 1\right) < 1.$$

Innen

$$10^{\frac{k-1}{58}} < \frac{1}{10^{\frac{1}{58}} - 1}, \qquad k < 1 + 58 \lg \frac{1}{10^{\frac{1}{58}} - 1}.$$

k tehát csak véges sok értéket vehet fel.

Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. g. IV. o. t.)