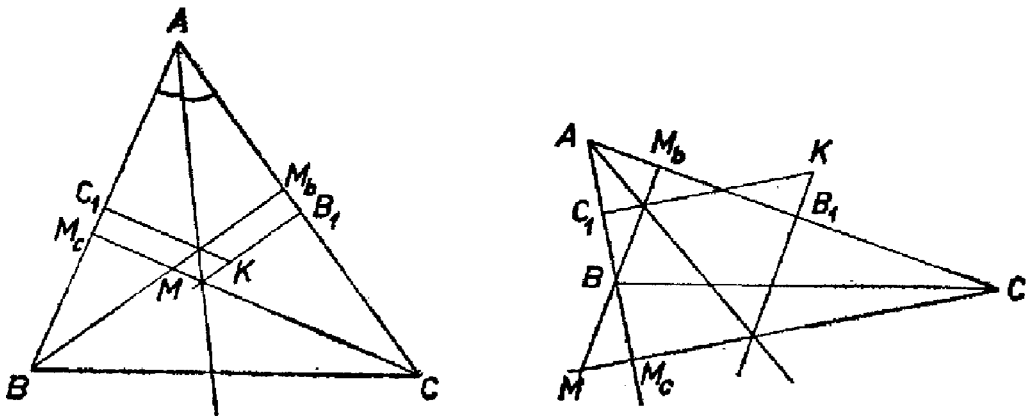
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a 60°-os szöget bezáró oldalakra merőleges magasságokat a szög felezőjén mint tengelyen tükrözve a bezáró oldalak felező merőlegeseit kapjuk. Ebből már következik, hogy az említett magasságpár metszéspontja, másrészt a felező merőleges-pár metszéspontja – vagyis a magasságpont és a körülírt kör középpontja –, egymás tükörképei a 60°-os szög felezőjére nézve; és így ez a két pont a szögfelező bármely pontjától egyenlő távolságra van, tehát a beírt kör középpontjától is.

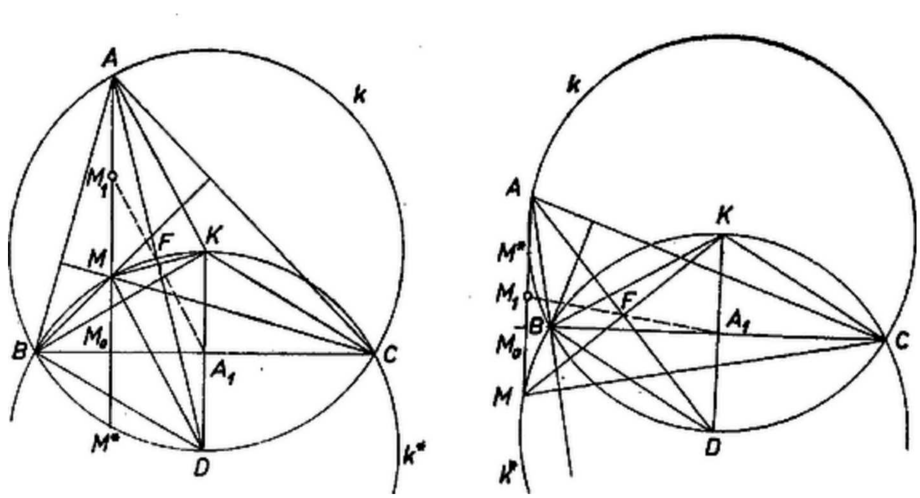


1. ábra

Legyen az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 60°$, a magasságpont M, a körülírt kör középpontja K, az AB és AC oldalakra merőleges magasság talppontja rendre M_c, M_b, az oldalfelező merőlegeseké pedig rendre C_1, B_1 (1. ábra). Így az ABM_b derékszögű háromszög hasonló egy a tengelyével kettévágott szabályos háromszög egyik feléhez, tehát a 60°-os szög melletti befogója egyenlő az átfogó felével: $AM_b = AB/2 = AC_1$. Eszerint az M_b, C_1 pontok, továbbá a rajtuk átmenő M_bM és C_1K egyenesek valóban tükrösek a BAC szög felezőjére nézve. Ugyanígy adódik az ACM_c háromszögből $AM_c = AB_1$. Ebből – mint láttuk – következik a feladat állítása.

Szabady Balázs (Győr, Révai M. g. III. o. t.)

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk; legyen továbbá a BAC szög felezőjének a k körülírt körrel való metszéspontja D (2. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $AMDK$ négyszög rombusz. Így M és K egymás tükörképei AD-re; ebből pedig – mint az I. megoldásban láttuk – következik a feladat állítása.

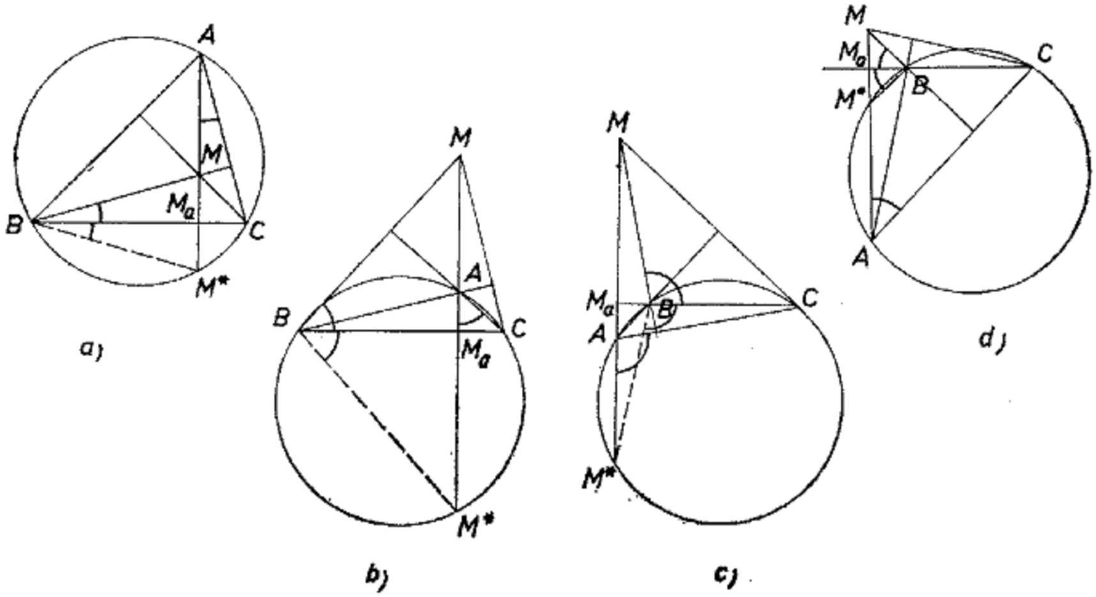


2. ábra

AM párhuzamos KD-vel, mert az utóbbi is merőleges BC-re, hiszen a DAB és DAC szögek egyenlősége miatt D felezi az A-t nem tartalmazó BC ívet. Fennáll az $AK = KD$ egyenlőség is, mert mindkettő a körülírt kör sugara. Elég tehát még az $AM = KD$ egyenlőséget bebizonyítanunk. Ehhez megmutatjuk, hogy B, M és K egy D középpontú $k^{\times}$ körön van. Ebből következik állításunk, mert $k^{\times}$ sugara, DK, egyenlő k sugarával, így D-t eltolva K-ba $k^{\times}$ átmegy k-ba. Az eltoláskor M a DK-val párhuzamos MA egyenesen mozog, s mivel k-ra kerül, annak A pontjába kell kerülnie. Így valóban $MA = DK$, az $AMDK$ négyszög tehát paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala egyenlő, vagyis rombusz.

Azt kell tehát még belátnunk, hogy a B, M, K pontokon átmenő $k^{\times}$ kör egyenlő sugarú k-val, középpontja D. Ez abból következik, hogy $k^{\times}$ tükörképe BC-re a k kör. Ugyanis B tükörképe önmaga. A BKD szög 60°-os, mert fele a 60°-os BAC szöghöz tartozó BKC középponti szögnek. Mivel még a BK és DK körsugarak egyenlők, így a BKD háromszög szabályos, tehát a DK-ra B-ből állított merőleges, BC, felezi DK-t, vagyis K tükörképe D. – Belátjuk még, hogy *bármely háromszögben a magasságpontnak bármelyik oldalra vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van.*

Ezzel a bizonyítás befejezést nyer, mert $k^{\times}$ három pontjának a tükörképe k egy-egy pontja, tehát a tükörkép egybeesik k-val, és k középpontja, K, a D tükörképe, tehát $k^{\times}$ középpontja D.



3. ábra

A hátralevő állítást így láthatjuk be: jelöljük az M magasságpont tükörképét a BC oldalra $M^{\times}$-gal, $MM^{\times}$ és BC egyenesek metszéspontját M_a-val. Ha M_a a BC szakaszon van, akkor ugyanaz a $CM^{\times}$ ív tartalmazza A-t és B-t – 3a) és b) ábra –, így $M^{\times}BC\sphericalangle = M^{\times}AC\sphericalangle$, mint egy íven nyugvó kerületi szögek, másrészt $M^{\times}AC\sphericalangle = CBM\sphericalangle$, mint merőleges szárú hegyesszögek. Ha M_a kívül van a BC szakaszon, pl. a B-n túli meghosszabbításán, és A és B ugyanazon az $M^{\times}C$ íven van – 3c) ábra –, akkor csak annyi változik, hogy az utolsó egyenlőség mindkét szöge tompaszög. Ha az A, B és $M^{\times}$, C pont párok elválasztják egymást a körön – 3d) ábra –, akkor $M^{\times}BM_a\sphericalangle = M^{\times}AC\sphericalangle$, mint az $AM^{\times}BC$ húrnégyszög külső szöge, és nem mellette fekvő belső szöge, másrészt $M^{\times}AC\sphericalangle = M_aBM\sphericalangle$ mivel merőleges szárú hegyesszögek. Így minden esetben BC-vel egyenlő szöget bezáró egyenesek metszik ki M-et és $M^{\times}$-ot egy a BC-re merőleges egyenesből, a két pont tehát egymás BC-re vonatkozó tükörképe. Ha M_a pl. B-vel egybeesik, akkor M és $M^{\times}$ is ide esik, az állítás nyilván ekkor is igaz.

Hadlaczky Éva (Székesfehérvár, Teleki B. g. IV. o. t.)
Palócz András (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $MA = DK$ egyenlőséget abból is beláthatjuk, hogy az MK szakasz felezőpontja az ABC háromszög Feuerbach-körének F középpontja (2. ábra), az MA és BC szakaszok M_1, ill. A_1 felezőpontjai viszont e kör egy átmérőjének végpontjai. Így $MA \parallel DK$ folytán $M_1FM\Delta \simeq A_1FK\Delta$, ezért $MA = 2MM_1 = 2KA_1$, ez pedig a feltevés folytán egyenlő KD-vel.

Merkel Géza és *Belső László*
(Budapest, XVIII., Hengersor úti g. IV. o. tanulók)

2. Az állítást vektoralgebrai úton is bizonyíthatjuk.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)