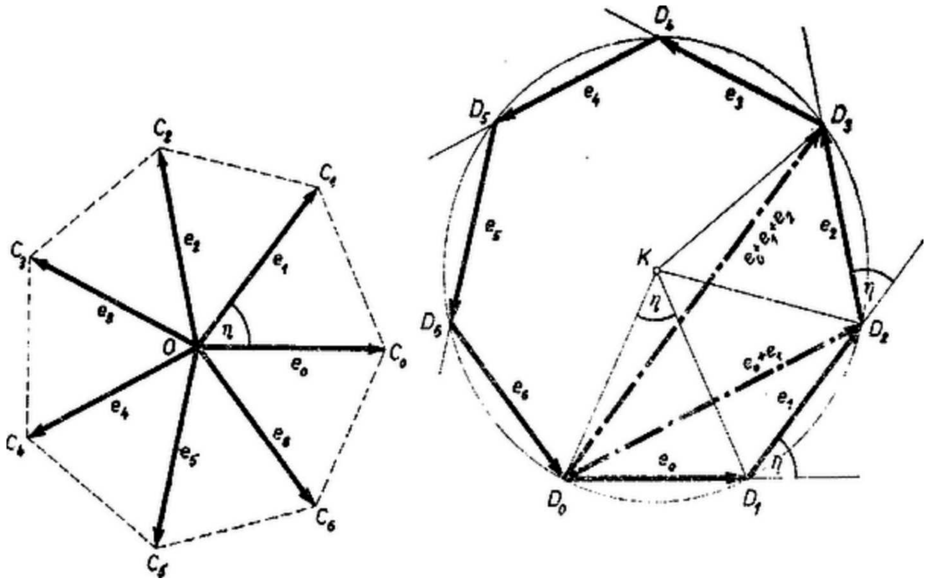
A bizonyítandó egyenlőség fennállását az 1246. feladat II. megoldásában számítással igazoltuk, ezért az alábbiakban számító megoldást nem közlünk.

I. megoldás. Írjunk egy egységnyi sugarú körbe egy $C_0C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hétszöget és irányítsunk mindegyik csúcsához egy vektort [1] a kör O középpontjából, legyenek ezek $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\ldots$, $\mathbf{e}_6$. Megmutatjuk, hogy e vektorok $\mathbf{e}$ összege a $\mathbf{0}$ vektor.



Mérjük fel egy D_0 pontból az $\mathbf{e}_0$-val egyenlő $\overrightarrow{D_0D_1}$ vektort, ennek D_1 végpontjából kiindulva a paralelogramma-szabály alkalmazásával az $\mathbf{e}_1$-gyel egyenlő $\overrightarrow{D_1D_2}$-t, D_2-ből az $\mathbf{e}_2$-vel egyenlő $\overrightarrow{D_2D_3}$-t, és így tovább, végül az $\mathbf{e}_5$-tel egyenlő $\overrightarrow{D_5D_6}$-nak D_6 végpontjából az $\mathbf{e}_6$-tal egyenlő $\overrightarrow{D_6D_7}$-t. Ekkor D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 egy szabályos hétszög egymás utáni csúcsai, és D_7 azonos D_0-lal. Ugyanis a $D_0D_1D_2$ háromszög egyenlő szárú, a D_0-nál és D_2-nél levő szöge fele a D_1-nél levő külső szögnek, ez pedig egyenlő az $\mathbf{e}_0$ és $\mathbf{e}_1$ közti szöggel, vagyis a teljes szög hetedrészével, jelöljük ezt η-val. Írjunk k kört a $D_0D_1D_2$ háromszög köré, és legyen ennek középpontja K, így a D_0KD_1 és D_1KD_2 szögek egyenlők η-val, és K az az egyetlen pont [2], amelyből D_0D_1 és D_1D_2 látószöge η. Meggondolásunkat megismételve $\mathbf{e}_0$ és $\mathbf{e}_1$ helyén $\mathbf{e}_1$-gyel és $\mathbf{e}_2$-vel, kapjuk, hogy a $D_1D_2D_3$ háromszög körülírt körének középpontja K, vagyis D_3 rajta van k-n. Ugyanígy haladva tovább D_7 is a k-n van, és a D_0KD_1, D_1KD_2, $\ldots$, D_6KD_7 szögek összege 7η a teljes szög, így valóban $D_7 \equiv D_0$ és $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_6 = \overrightarrow{D_0D_7} = \mathbf{0}$.

Bontsuk fel vektorainkat az $\mathbf{e}_0$-val megegyező irányú és arra merőleges összetevőkre, ekkor $\mathbf{e}_h$ koordinátái

$$\mathbf{e}_h \left(\cos\frac{h\cdot 2\pi}{7},\ \sin\frac{h\cdot 2\pi}{7}\right) \qquad (h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$$

(a C csúcsok indexei a pozitív forgás irányában növekszenek).

Az összetevők összege bármely irányra nézve $\mathbf{0}$, mert $\mathbf{e} = \mathbf{0}$-nak bármely irányú összetevője $\mathbf{0}$. Írjuk fel ezt az $\mathbf{e}_0$ irányú összetevőkre, és alkalmazzuk a tagokra a

$$\cos(x-\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

azonosságokat:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} &= \\ = 1 + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} &= \\ = 2\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ezért a zárójeles kifejezés 0, ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőség jobb és bal oldalának különbsége. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Komor Tamás (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

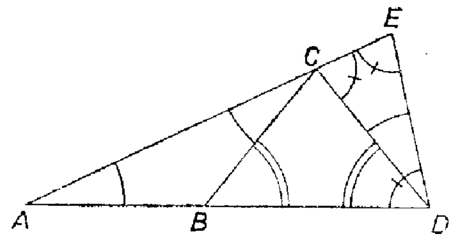
---

[1] A vektorokra vonatkozó elemi ismeretek megtalálhatók pl.: *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János:* Matematikai Versenytételek II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1957) 26–30. o.

[2] A kisebb $D_0D_1D_2$ szögtartományban.

Megjegyzés. Az $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ megállapítást a szimmetriát jobban kihasználva rövidebben kapjuk a következő meggondolással. Vektorrendszerünk az O körüli η szögű elforgatással önmagába megy át, ezért összegét az eredeti és az elforgatott helyzetben képezve ugyanazt az eredményt kapjuk. Az elforgatott helyzetbeli összeg az eredeti összegből η-val való elforgatással adódik, ez csak akkor azonos az eredeti összeggel, ha az összeg $\mathbf{0}$, mert a nullvektortól különböző vektort elforgatva, tőle különböző vektort kapunk, hacsak a forgási szög nem egész számú többszöröse 2π-nek.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. g. IV. o. t.)



II. megoldás. Mérjük fel egy $\vartheta = \pi/7$ nagyságú szög A csúcsától az egyik szárra az $AB = 1$ szakaszt, majd jelöljük ki a szárakon váltakozva az előbbiektől mindig különböző C, D, E pontokat úgy, hogy álljon $AB = BC = CD = DE$. Ekkor az ábra összes szögeit kifejezhetjük ϑ-val, figyelembe véve, hogy az ABC, BCD és CDE háromszögek egyenlő szárúak, valamint a külső szög tételét alkalmazva az ABC és ACD háromszögekre: $ACB\sphericalangle = \vartheta$; $CBD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = 2\vartheta$; $DCE\sphericalangle = DAC\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 3\vartheta$ (hegyesszög) $= CED\sphericalangle$; $CDE\sphericalangle = \vartheta$; végül $ADE\sphericalangle = 3\vartheta$. Ezek szerint, az ADE háromszög is egyenlő szárú: $AE = AD$, ill. e szárak részeit az előbbi egyenlő szárú háromszögekből ϑ-val kifejezve

$$AC + CE = AB + BD, \qquad 2\cos\vartheta + 2\cos 3\vartheta = 1 + 2\cos 2\vartheta.$$

Innen a bizonyítandó egyenlőség osztással és rendezéssel adódik.

Nagy László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)