Kétszeri négyzetreemeléssel az egyenlet olyan következményét írhatjuk fel, amelyben nem szerepel gyökjel:

$$4 \cdot \sqrt{(x^2-p)(x^2-1)} = p+4-4x^2,$$
$$16p-16(p+1)x^2 = p^2+8p+16-8(p+4)x^2,$$

amiből

$$8(2-p)x^2 = p^2-8p+16 = (p-4)^2, \tag{2}$$
$$x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)}.$$

Eszerint gyök gyanánt csak az

$$x_1 = \frac{p-4}{\sqrt{8(2-p)}}, \qquad x_2 = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

számok jönnek szóba, ha ti. $p \neq 2$. A $p=2$ esetben (2) ellentmondást fejez ki, ekkor (1)-nek nincs gyöke.

x_1 és x_2 valósak, ha $p<2$. Ekkor $x_1<0$; ez nem lehet gyöke (1)-nek, mert (1) bal oldala nem negatív. x_2-t (1)-be helyettesítve a két négyzetgyök alatti kifejezés:

$$x^2-p = \frac{p^2-8p+16}{16-8p} - p = \frac{9p^2-24p+16}{8(2-p)} = \frac{(3p-4)^2}{8(2-p)},$$
$$x^2-1 = \frac{p^2}{8(2-p)}.$$

Ha $p<2$, akkor mindkét kifejezés pozitív. Négyzetgyökük összegének kell x_2-t adnia ahhoz, hogy x_2 gyöke legyen (1)-nek, vagyis a közös nevezőt mindjárt elhagyva – teljesülnie kell a következő egyenlőségnek

$$|3p-4|+2|p| = 4-p.$$

A bal oldal $p<0$ esetén

$$-(3p-4)+2(-p) = -5p+4 \neq 4-p,$$

tehát x_2 nem gyök; $0 \le p \le 4/3$ esetén

$$-(3p-4)+2p = -p+4,$$

tehát ebben az intervallumban x_2 kielégíti (1)-et; végül $4/3<p<2$ esetén a bal oldal

$$3p-4+2p = 5p-4,$$

ami ebbe az intervallumba eső értékekre nem egyenlő a jobb oldallal, tehát x_2 ebben az esetben sem gyök.

Mindezek szerint az (1) egyenlet egyetlen valós gyöke $0 \le p \le 4/3$ esetén

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}},$$

más p értékek esetén nincs valós megoldása:

Surányi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Meghatározhatjuk azt az intervallumot, amelybe a gyök esik. Átalakítással

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}} = \sqrt{\frac{16-8p+p^2}{16-8p}} = \sqrt{1+\frac{p^2}{16-8p}},$$

eszerint a p számára megállapított $(0, 4/3)$ intervallumon végighaladva x növekszik, mert a gyök alatt a tört számlálója növekszik, nevezője csökken. $p=0$ esetén $x=1$, $p=4/3$ esetén $x=2/\sqrt{3}>1$, tehát a mondott intervallum $(1, 2/\sqrt{3})$.