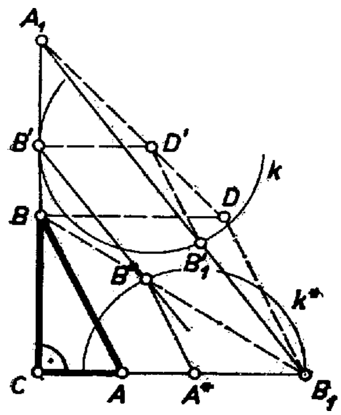
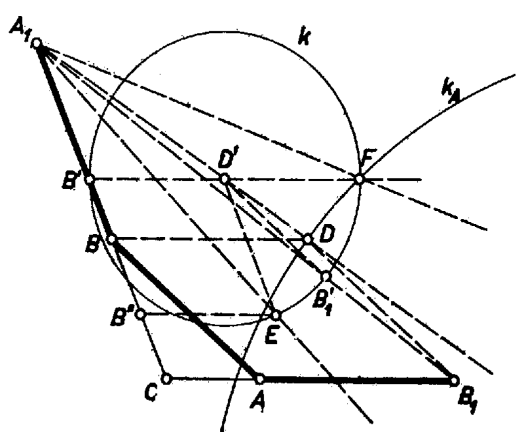
I. megoldás. Legyen ABC a keresett háromszög, $a = BC$, $b = AC$ a befogók, $c = AB$ az átfogó. Mérjük rá a befogók meghosszabbítására az $AB_1 = BA_1 = c$ távolságot (1. ábra). Ekkor az $A_1B_1C\Delta$ befogói $A_1C = a + c = p$, $B_1C = b + c = q$ a megadott távolságok. Így a feladatot a következővé alakítottuk át: Szerkesszük meg adott $A_1B_1C\Delta$ A_1C és B_1C oldalán a B és A pontot úgy, hogy az A_1BAB_1 törött vonal egyenlő szakaszokból álljon. Ez a feladat többféleképpen is megoldható.



1. ábra

a) A B-ből AB_1-gyel és B_1-ből AB-vel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja legyen D, ekkor az A_1BDB_1 törött vonal is egyenlő szakaszokból áll, és első két szakasza A_1C-vel és CB_1-gyel párhuzamos. Ehhez hasonlót a szerkeszthetünk úgy, hogy A_1C-re A_1-ből tetszés szerinti A_1B' távolságot mérünk; B'-ből A_1C-re merőlegesen annak B_1-et tartalmazó partján felmérjük a $B'D' = A_1B'$ távolságot; a D' körül $D'B'$ sugárral rajzolt körnek az A_1-től távolabbi metszéspontja A_1B_1-gyel legyen B_1'. D-t az A_1D' és a B_1-ből induló, $B_1'D'$-vel párhuzamos egyenes metszéspontja adja; végül B-t a D-n át B_1C-vel párhuzamosan húzott egyenes metszi ki A_1C-ből, A-t pedig a B_1 középpontú B_1D sugarú kör a B_1C szakaszból.

Világos, hogy a megszerkesztett törött vonal egyenlő szakaszokból áll, s így az $ABC\Delta$ megfelel a feladat kirovásainak, feltéve, hogy A és B a CB_1 és CA_1 oldalon keletkezik. A szerkesztés változatlanul végrehajtható, ha a C-nél levő γ szög adott, de derékszögtől különböző (2. ábra). Nem alkalmazható, ha D (és D') az A_1B_1 egyenesre esik, azaz ha az $A_1B_1C\Delta$ egyenlő szárú, $p = q$. Ekkor azonban az $ABDB_1$ rombusz átlója, amely felezi az AB_1D szöget, egyben az A_1B_1C szög felezője is, tehát ez metszi ki B-t A_1C-ből, továbbá ez esetben $AB \parallel A_1B_1$.



2. ábra

A $D'B_1'$-vel párhuzamos BA irány az A_1C és CB_1 irány közé esik; így B_1'-nek az ezekkel párhuzamos sugarak alkotta $ED'F$ konvex (B'-t nem tartalmazó) szögtartományban kell lennie, akkor keletkezik A és B a megfelelő oldalszakaszokon. Jelöljük az E-ből B_1C-vel párhuzamosan húzott egyenes és A_1C metszéspontját B''-vel. Ekkor a mondott feltétel azzal ekvivalens (mivel B_1' az A_1B_1 egyenesen van), hogy $p/q = A_1C/B_1C$ az $A_1B'/B'F = 1/2$ és $A_1B''/B''E = 2$ értékek közé essék (ugyanis $A_1B'' = A_1B' + B'B'' = A_1B' + D'E = 2A_1B'$). A szerkeszthetőség feltétele tehát, hogy $q/2 < p < 2q$ legyen, más szóval az adott szakaszok közül, ha nem egyenlők, a nagyobbik kisebb legyen a kisebbik kétszeresénél.

b) Az előbbi megoldás jelöléseit megtartva, de nem szorítkozva derékszögű háromszögre $A_1D = 2A_1B\sin(\gamma/2) = 2B_1D\sin(\gamma/2)$. A D pont A_1-től és B_1-től mért távolságának aránya eszerint $2\sin(\gamma/2)$, D tehát az ennek megfelelő Apollóniosz-féle kör és az A_1-ből induló, A_1C-vel $90° - \gamma/2$ szöget bezáró félegyenes metszéspontja. Tovább az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el.

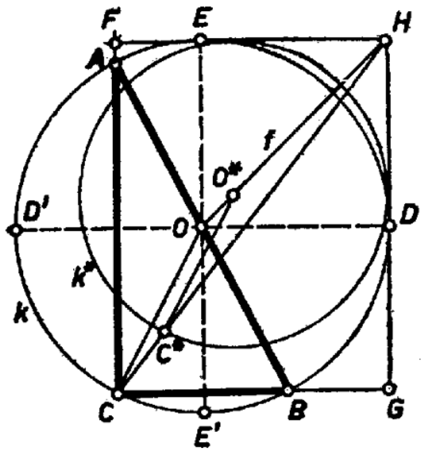
$\gamma = 60°$ esetében az Apollóniosz-kör helyébe a B_1A_1 szakasz felező merőlegese lép.

A szerkesztés helyessége az elemzés gondolatmenetének megfordításával könnyen belátható. A szerkeszthetőség feltételének megállapítását az olvasóra bízzuk.

c) A D pont segítségül vétele nélkül is megszerkeszthető az A_1BAB_1 törött vonal. Mérjük fel A_1C-re és B_1C-re az egyenlő A_1B' és B_1A^* távolságot, húzzuk meg az A^* középpontú és A^*B_1 sugarú k^* körnek azt a felét, amelyik a B_1C egyenes A_1-et tartalmazó partján fekszik, majd toljuk el A_1B'-t párhuzamosan A_1B_1 mentén úgy, hogy B' a félkörre essék. A pont új B^* helyzetét a B'-ből A_1B_1-gyel párhuzamosan húzott egyenes metszi ki a félkörből. B-t a B_1B^* egyenes metszi ki A_1C-ből, A-t pedig a B-n át B^*A^*-gal párhuzamosan húzott egyenes B_1C-ből.

A szerkesztés helyessége könnyen látható, igazolását (ami az *a)* esethez hasonlóan végezhető) az olvasóra hagyjuk.

Csirik János (Orosháza, Táncsics M. G.)
Horváth József (Esztergom, Temesvári Pelbárt G.)



3. ábra

II. megoldás. A következő megoldás kihasználja, hogy $\gamma = 90^\circ$. Az adott szakaszok felét közvetlenül megtaláljuk 3. ábránkban, ha vesszük a keresett ABC háromszög köré írt k kört és ennek az AC és BC befogókra merőleges DD', ill. EE' átmérőjét (D és E a C-t nem tartalmazó AB íven). Ugyanis a derékszögű háromszög köré írt kör sugara $c/2$, középpontjának, O-nak távolsága az AC és BC befogóktól $a/2$, ill. $b/2$, ezért D távolsága AC-től $(a+c)/2$, E távolsága BC-től $(b+c)/2$.

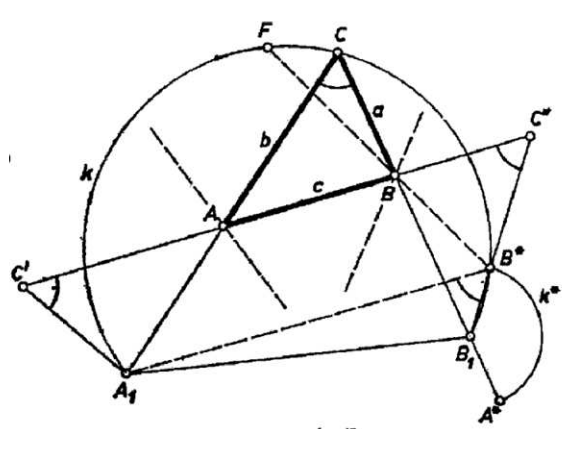
Tekintsük most azt a téglalapot, amelynek oldalegyenesei egyrészt az ACB derékszög szárai, másrészt az ezekkel D-n, ill. E-n át húzott párhuzamosok. A k kör ennek utóbbi két oldalát érinti és átmegy az érintett oldalak közös végpontjából kiinduló átló másik végpontján.

Ezekből a következő szerkesztés adódik: Az adott szakaszok feléből megszerkesztjük a $CGHF$ téglalapot ($CG = p/2$, $CF = q/2$), meghúzzuk a HC átlót és az FHG derékszög f felezőjét. f-nek egy tetszés szerinti O^* pontja körül a HF egyenest érintő k^* kört írunk, ennek a HC egyenessel való, H-tól távolabbi metszéspontja C^*. A C-n átmenő, C^*O^*-gal párhuzamos egyenesnek f-fel való O metszéspontja körül OC sugárral írt körből az FC, GC egyenes kimetszi A-t, ill. B-t.

Ha C^*-nak GH-tól mért távolsága kisebbnek adódik, mint k^* sugara, vagy ha egyenlő vele, akkor az adódó O-t CF elválasztja D-től, B a GC meghosszabbításán keletkezik, és az $ABC\Delta$-ben $AB - BC = p$, $AB + AC = q$. (Hasonló áll az előző megoldásokban is, ha a szerkeszthetőség feltétele nem teljesül, azzal a kiegészítéssel, hogy a megszerkesztett háromszögben γ helyén a kiegészítő szöge lép fel.)

A szerkesztés nem hajtható végre, ha $p = q$, mert így O és O^* a CH átlón van; viszont ekkor $DCH\sphericalangle = 22{,}5^\circ$, és ez ad módot a szerkesztésre.

Nagy Péter Tibor (Kiskunhalas, Szilády Á. G.)



4. ábra

III. megoldás. A következő megoldás bonyolultabb az előzőknél, viszont még hasonlóságot sem használ fel. Tükrözzük a keresett $ABC\Delta$-et az A és a B csúcsnál levő külső szög felezőjére, és legyen a tükörkép AA_1C', ill. B_1BC'' (4. ábra). Az A_1 csúcs CA, B_1 pedig CB meghosszabbításán van, $CA_1 = CA+AB = b+c = q$, $CB_1 = a+c = p$, továbbá C' és C'' az AB meghosszabbításain vannak, $A_1C'C''\sphericalangle = B_1C''C'\sphericalangle = A_1CB_1\sphericalangle = \gamma$, és $C''B_1 = CA = b$. Messe az A_1-en átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes $C''B_1$-et B^*-ban. Így $A_1B^*C''C'$ szimmetrikus trapéz, $C''B^* = C'A_1 = CB = a$, $B^*B_1 = C''B_1 - C''B^* = b - a = q - p = CA_1 - CB_1$ végül $A_1B^*B_1\sphericalangle = C'C''B_1\sphericalangle = \gamma$. A $q > p$ (vagyis $b > a$) feltevés miatt A_1B^* elválasztja B_1-et C''-től, és így C-től is, ezért B^* az $A_1B_1C\Delta$ köré írt k körnek C-t tartalmazó A_1B_1 ívén van.

Ezek alapján az $ABC\Delta$ megszerkesztése a következő.

Egy C csúcsú, γ nagyságú szög száraira fölmérjük $CA_1 = CA^* = q$ szakaszt, a második szárra $CB_1 = p$-t is. Megrajzoljuk k-t, és ennek mondott ívét metsszük a B_1 körüli, $B_1A^* = q - p$ sugarú k^* körrel, a metszéspont B^*. Az $A_1B_1B^*\Delta$ B^*-ból kiinduló külső szögfelezője CB_1-ből kimetszi B-t, végül a B-n átmenő, A_1B^*-gal párhuzamos egyenes CA_1-ből A-t.

Az $ABC\Delta$ megfelel a követelményeknek. Legyen AB és B_1B^* metszéspontja C'', továbbá C' az AB-nek A-n túli meghosszabbításán az a pont, amelyre $A_1C'A\sphericalangle = \gamma$. Ugyanekkora a $B_1B^*A_1\sphericalangle$ és a vele egyállású $B_1C''B\sphericalangle$, ezért, valamint az A-nál és B-nél levő csúcsszögek miatt az ABC, AA_1C' és B_1BC'' háromszögek két-két megfelelő szöge egyenlő. Az utóbbi két háromszög egybevágó, mert ezeken felül egy-egy megfelelő oldaluk egyenlő, ugyanis a végzett szerkesztések miatt B^*BC'' egyenlő szárú háromszög, $A_1B^*C''C'$ pedig egyenlő szárú trapéz, így valóban $A_1C' = B^*C'' = BC''$. Eszerint $AA_1 = B_1B$. Egyenlő továbbá az előbbi első és utolsó háromszög két-két megfelelő oldalának különbsége:

$$\begin{aligned} CA - CB = CA_1 - AA_1 - CA^* + BA^* = BB_1 + B_1A^* - AA_1 = \\ = B_1B^* = B_1C'' - B^*C'' = B_1C'' - BC'', \end{aligned}$$

eszerint $ABC\Delta \simeq B_1BC''\Delta \simeq AA_1C'\Delta$. Ennélfogva az $ABC\Delta$-ben

$$\begin{aligned} CA + AB = CA + AA_1 = CA_1 = q, \\ CB + BA = CB + BB_1 = CB_1 = p, \end{aligned}$$

végül az $ACB\sphericalangle$ az előírt γ nagyságú. Ezeket kellett bizonyítanunk.

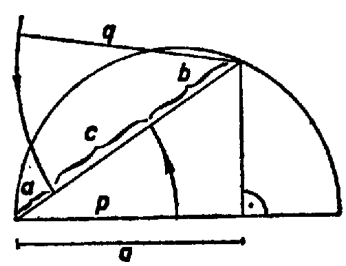
A felhasznált B^*B szögfelező k-ból a C-t tartalmazó A_1B_1 ív F felezőpontján át lép ki, másrészt $q > p$ miatt F a mondott ív CA_1 rész-ívén van. Ezért B akkor és csak akkor adódik a CB_1 szakasz belsejében, ha B^* a B_1C íven adódott. Ennek feltétele $B_1B^* < B_1C$, $q - p < p$, azaz $p < q < 2p$. Ekkor A a CA_1 szakaszon adódik, mert az AB egyenes elválasztja C-t A_1B^*-tól.

Ebben a szerkesztésben sem használtuk ki, hogy γ derékszög. Ha $\gamma = 90°$, akkor $A_1B^* = C'C'' = a + b + c$.

Mezey István (Debrecen, Fazekas M. G.)

Megjegyzés. $p = q$ esetén a szerkesztés nem alkalmazható, mert $B^* = B_1$.

IV. megoldás. Könnyen célhoz érhetünk számítás segítségül vételével. A $c + a = p$, $c + b = q$, $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletrendszerből $c = p+q-\sqrt{2pq}$ (a másodfokú egyenlet másik gyöke nem felel meg, mert $p+q = c+(a+b+c) > c$). Eszerint $b = \sqrt{2pq} - p$, vagyis $2p$ és q mértani középarányosából p-t kivonva a b befogót, q kivonásával a-t kapjuk. A kapott eredmény $b + p = a + b + c = \sqrt{2pq}$ alakban is írható, ezért a kivonásokat a mértani középpel egyenlő szakasz két vége felől végezve, középső szakaszként megjelenik az átfogó (5. ábra).



5. ábra

Radó András (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. G.)

Megjegyzések. 1. A szerkesztés átvihető tetszés szerinti γ szögre, Pythagoras tételét a koszinusz-tétellel helyettesítve.

2. Az utoljára nyert összefüggés szerint derékszögű háromszög oldalaira mindig fennáll:

$$(a + b + c)^2 = 2(a + c)(b + c),$$

ahol c az átfogó. Hasonlóan

$$\begin{aligned} (a + c)^2 + (b + c)^2 + (a + b + c)^2 = \\ = [(a + c) + (b + c)]^2 . \end{aligned}$$

A III. megoldásnak derékszögű háromszögre való alkalmazása az

$$(a+b+c)^2+(b-a)^2=(a+b+c)^2+[(b+c)-(a+c)]^2= \\ =(a+c)^2+(b+c)^2$$

azonossággal egyértelmű. Ezek az összefüggések egy-egy lehetőséget adnak $a+b+c$ megszerkesztésére, abból pedig a, b és c már könnyen nyerhető.