I. Jelöljük egy tetszőleges 3-jegyű szám jegyeit A, B, C-vel, ekkor $S=A+B+C$. Legyen először $1\leq S\leq 9$. Egy ilyen S-érték mellett A lehetséges értékei 1, 2, ... S és A-t rögzítve B a 0-tól $S-A$-ig terjedő egészek bármelyike lehet, hiszen $S-A\leq 9-1=8$, és a C-re ebből egyértelműen meghatározott $S-A-B$ érték is 0 és 8 közt van. Így adott A-val $S-A+1$ számot, azaz A növekvő értékei mellett sorra S, $S-1$, $S-2$, ..., 2, 1 számot kapunk. A vizsgált esetben tehát azoknak a 3-jegyű számoknak a száma, amelyekben a számjegyek összege S:

$$f(S)=S+(S-1)+\ldots+2+1=\frac{S(S+1)}{2}, \tag{1}$$

az állítás első részének megfelelően.

II. Könnyen visszavezethetjük az előbbire a 19 és 27 közé eső jegyösszegek esetét. Egy ide tartozó $\overline{ABC}$ számhoz (amelyre tehát

$$19\leq A+B+C=S\leq 27,\qquad 1\leq A\leq 9,\qquad 0\leq B,\qquad C\leq 9)$$

képezzük az

$$A'=10-A,\qquad B'=9-B,\qquad C'=9-C \tag{2}$$

jegyekkel felírt számot. Erre egyrészt

$$9\geq A'\geq 1,\qquad 9\geq B',\qquad C'\geq 0,$$

vagyis $\overline{A'B'C'}$ a figyelembe vett számok közül való, másrészt $S'=A'+B'+C'=28-S$, tehát $9\geq S'\geq 1$.

$\overline{A'B'C'}$-höz az $A=10-A'$, $B=9-B'$, $C=9-C'$ képletek alapján (vagyis lényegében ismét (2) szerint) határozhatjuk meg azt a számot, amelyhez hozzárendeltük.

Ezek szerint $19\leq S\leq 27$-re ugyanannyi 3-jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege S, mint ahány 3-jegyű szám van $S'=28-S$ számjegyösszeggel, vagyis

$$f(S)=\frac{(28-S)(29-S)}{2}=\frac{S^2-57S+812}{2},$$

az állítás harmadik részének megfelelően.

III. Legyen végül $10\leq S\leq 18$. Ekkor A 1-től 9-ig minden értéket felvehet, és ha A értéket rögzítettük, és $B+C=S-A\leq 9$, akkor a B, C jegyekre végződő számok száma az I. esethez hasonlóan $B+C+1=S+1-A$. Ez áll A-nak S -9-től 9-ig terjedő értékeire, ezért az összes ilyen számok számát a következő számtani sor adja:

$$\begin{gathered}\big[(S+1)-(S-9)\big]+\big[(S+1)-(S-8)\big]+\ldots+\big[(S+1)-9\big]=\\ =\frac{1}{2}(19-S)\big[2(S+1)-S\big]=\frac{1}{2}(19-S)(2+S).\end{gathered} \tag{3}$$

Ha viszont $B+C=S-A>9$, akkor B lehetséges értékeinek számát megkapjuk úgy, hogy a fent használt $B+C+1=S+1-A$ számból kivonjuk az olyan értékek számát, amelyekre $B>9$, vagy $C>9$. Az előbbiek száma is, az utóbbiaké is $(S+1-A)-10=S-9-A$, tehát B lehetséges értékeinek száma $(S+1-A)-2(S-9-A)=19-S+A$ (ugyanis $B>9$ és $C>9$ egyidejűleg lehetetlen, mert $S>19$-re vezet). Ez áll A-nak $S-9$-nél kisebb értékeire, 1, 2, ..., $S-10$-re, ezért az ilyen $\overline{ABC}$ számok együttes száma

$$\begin{gathered}\big[(19-S)+1\big]+\big[(19-S)+2\big]+\ldots+\big[(19-S)+(S-10)\big]=\\ =\frac{1}{2}(S-10)(38-2S+S-9)=\frac{1}{2}(S-10)(29-S).\end{gathered} \tag{4}$$

Ezek szerint adott, 10 és 18 közti S esetén az S számjegyösszeget adó háromjegyű számok száma (3)-ból és (4)-ből összeadással

$$\frac{1}{2}\big[(38+17S-S^2)+(-290+39S-S^2)\big]=-S^2+28S-126.$$

Ezzel az állítást S mindhárom részintervallumára igazoltuk.

Dénes Endre (Nagykőrös, Arany J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy jártak el – de sokkal több munkát végeztek –, akik felírták egy táblázat egymás utáni soraiba azoknak a számoknak a számát, amelyek első jegye egy adott érték (1-től 9-ig) és a számjegyek összege rendre 1, 2, ..., 27. Ekkor az S-edik oszlopban levő számok összege $f(S)$. A táblázat szabályosságainak megfigyeléséből jutottak el azután a feladat állításának bizonyításához.