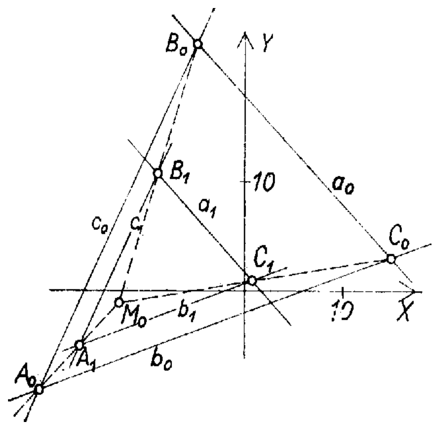
I. A leírt grafikus eljárás során a következő metszéspontokat találjuk (1. ábra):

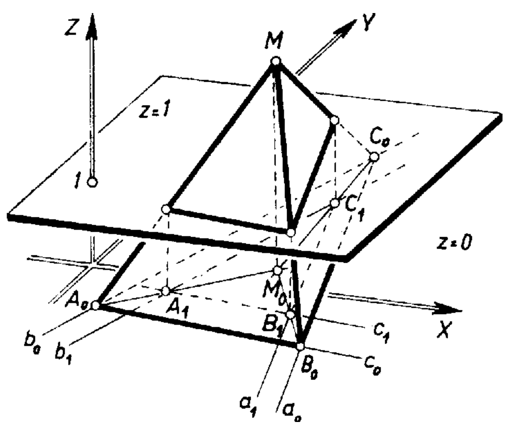
$$C_0(15;\,3),\quad A_0(-21;\,-9),\quad B_0(-5;\,23);$$
$$C_1(1;\,1),\quad A_1(-17;\,-5),\quad B_1(-9;\,11),$$

és a C_0C_1, A_0A_1 és B_0B_1 egyenesek valóban egy pontban metszik egymást, az $M_0(-13;\,-1)$ pontban. Ez megfelel az állításnak, és a leírt eljárással bármelyik egyenletből a $z = 2$ értéket kapjuk.



1. ábra

II. Felhasználva a megengedett tételeket,[1] a következő elgondolás adódik egy három egyenletből álló, háromismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszer megoldásának megkeresésére. Állítsuk elő mindhárom egyenlethez a hozzátartozó síkot az X, Y, Z tengelyekkel meghatározott térbeli derékszögű koordinátarendszerben [2] Két ilyen sík általában egy egyenesben metszi egymást, a metszésvonal pontjainak koordinátái a megfelelő két egyenlet mindegyikét kielégítik, és ez a tulajdonsága csak a metszésvonal pontjainak van meg. A harmadik sík ezt a metszésvonalat általában egy pontban metszi (3. ábra), ennek és csak ennek a pontnak a koordinátái mind a három egyenletet kielégítik, vagyis a három sík egyetlen közös pontjának koordinátái a rendszer megoldását adják. – A három sík közös pontján mindhárom síkpár metszésvonala átmegy[3].

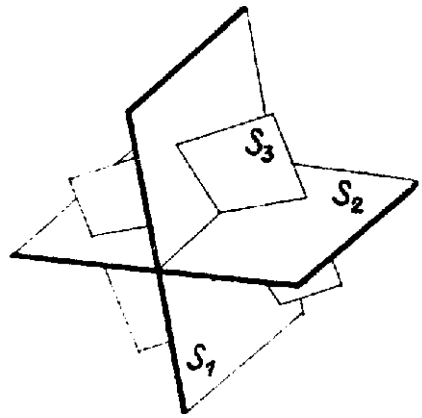


2. ábra

[1]Az eredeti kitűzés megengedte néhány tétel bizonyítás nélkül való felhasználását.

[2]Az az állítás, hogy az S_1, sík pl. az (1) egyenlet képe, és fordítva, hogy S_1 egyenlete (1), a síkbeli megfelelő kapcsolatokhoz hasonlóan azt jelenti, hogy minden az egyenletet kielégítő x, y, z számhármassal mint koordinátákkal meghatározott pont rajta van S_1-en, és fordítva, S_1, minden pontjának x, y, z koordinátái kielégítik az egyenletet.

[3]Ha a három síknak nincs közös pontja, mert a harmadik sík párhuzamos az első kettő metszésvonalával, esetleg a síkok egyikével is, vagy mert mindhárom sík párhuzamos, és így bármelyik kettőjüknek nincs metszésvonala, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, a rendszer ellentmondást tartalmaz, ezen az úton sem oldható meg. Ha pedig a három síknak több közös pontja van, mert pl. S_3 tartalmazza S_1 és S_2 metszésvonalát, vagy két sík, vagy mindhárom sík egybeesik, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, tehát nincs határozott megoldása. Két egyenlet képe ugyanaz a sík, ha van olyan állandó, amellyel pl. az első egyenletet megszorozva a másodikat kapjuk. – Könnyen belátható, hogy a 3. – –7. ábrák feltüntetik 3 különböző sík kölcsönös helyzeteinek minden lehetséges típusát.

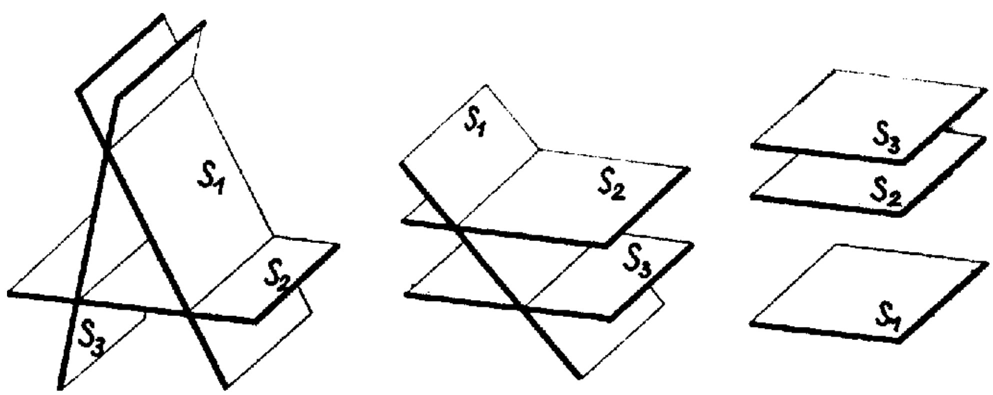


3. ábra

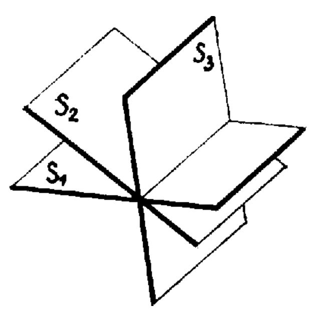
A vizsgált eljárás az adott egyenletrendszer esetére az elgondolt térbeli alakzat vetületét szerkeszti meg az XY síkon. Ugyanis az a_0 egyenes az (1)-et ábrázoló S_1 síknak az XY síkkal való metszésvonala, hiszen $z = 0$ az XY sík egyenlete, rajzunk R síkjáé. Hasonlóan b_0, c_0 a (2), ill. (3) egyenletű S_2, ill. S_3 síknak R-rel való metszésvonala. S_1, S_2, S_3 és R egy $A_0B_0C_0M$ háromoldalú gúla lapsíkjai, az $A_0B_0C_0$ háromszög a gúla alaplapja, pl. C_0 az S_1, S_2 és R közös pontja (2. ábra).

Továbbmenve a $z = 1$ sík párhuzamos a $z = 0$ síkkal, ezért gúlánk oldallapsíkjait egy–egy az a_0, b_0, ill. c_0 egyenessel párhuzamos egyenesben metszi, ezek páronkénti metszéspontjai a gúla oldaléleinek a $z = 1$ síkkal való metszéspontjai. Az a_1, b_1, c_1 egyeneseknek ugyanazon síkbeli koordinátarendszerbe való berajzolásával, és páronkénti C_1, A_1, B_1 metszéspontjaik megjelölésével éppen a mondott metszésvonalaknak és metszéspontoknak R-en való merőleges vetületét állítjuk elő, ugyanis ilyen vetítésnél az első két koordináta változatlanul marad. Eszerint az A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 egyenesek a gúla oldaléleinek R-en levő vetületei, ezért mindhárom átmegy a gúla M főcsúcsának R-en levő merőleges vetületén. Ezért közös M_0 pontjuk az M vetülete, és így M_0 két koordinátája valóban egyezik M első két koordinátájával, az egyenletrendszer megoldásából x és y értékével.

Ezek szerint a leírt eljárás helyes, éspedig nemcsak az (1)–(3) rendszer esetében, hanem minden olyan egyenletrendszer esetében, amelyben a felhasznált a_0, b_0, …, c_1 előkészítő egyenesek, az A_0, B_0, …, C_1 előkészítő pontok és az M_0 pont létrejön.

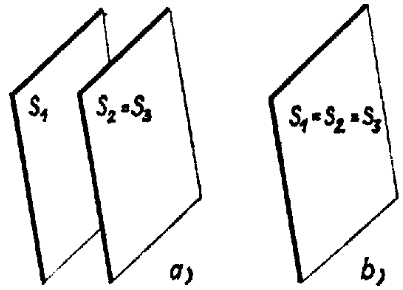


a) b) c) *4. ábra*

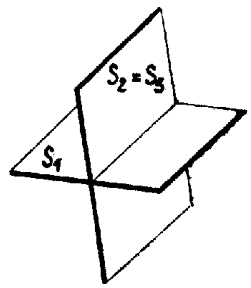


5. ábra

III. Előfordulhat, hogy valamelyik pont vagy egyenes nem jön létre. Ilyenkor lehet, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek, de lehet az is, hogy egyszerűsödik a leírt eljárás. Ezt néhány példán illusztráljuk, megjegyezve, hogy a 3–7. ábrákon látható összes helyzetekhez van olyan egyenletrendszer, amelynek egyenleteit ilyen síkok ábrázolják, és hogy további speciális esetekre vezet az, ha egyes síkok vagy egyenesek párhuzamosak az ábrázolás síkjával, vagy merőlegesek rá.



6. ábra

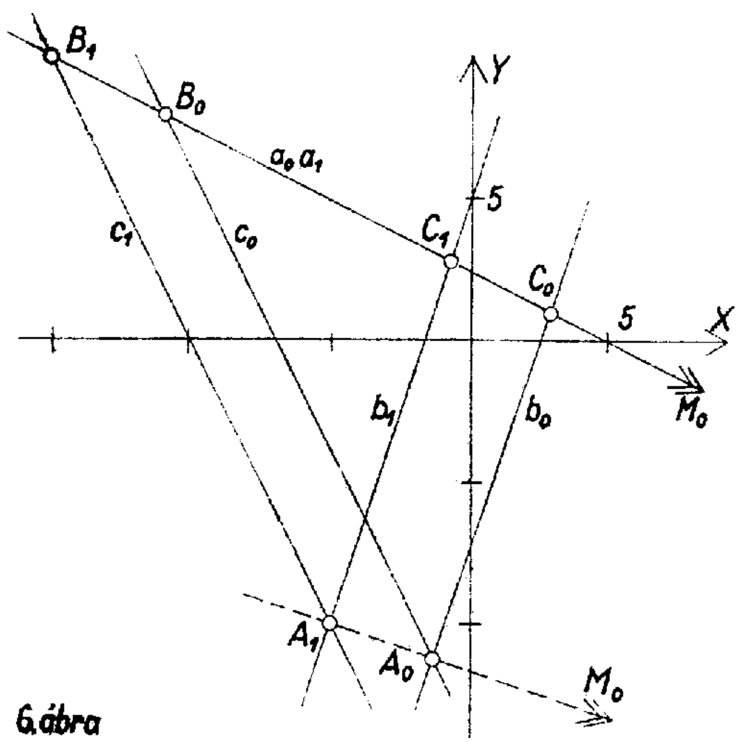


7 ábra

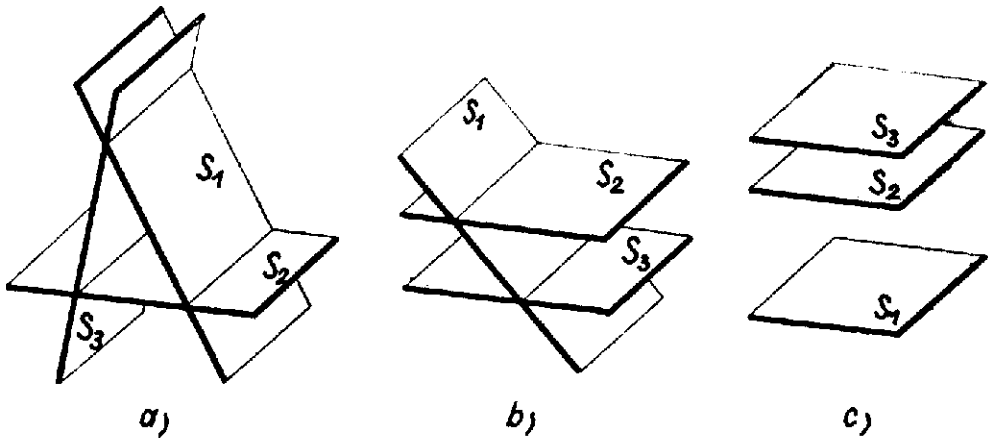
1. A következő rendszer első egyenletében z együtthatója 0:

$$x + 2y = 5, \quad 3x - y + 12z = 7, \quad 2x + y + 6z = -14,$$

így a_0, a_1, B_0B_1 és C_0C_1 egybeesik, de A_0A_1 kimetszi belőle M_0-t (8. ábra, M_0 messze kiesik). A rendszernek van határozott megoldása; a síkok kölcsönös helyzete olyan típusú, mint a 3. ábrán, S_1 merőleges R-re.



8. ábra



9. ábra

2. Az alábbi rendszer esetében b_0 és c_0 párhuzamosak:

$$3x+2y+2z=0, \quad 2x+3y+2z=3, \quad 4x+6y+5z=8{,}5.$$

A_0 és A_1 nem jön létre, de B_0B_1 és C_0C_1 metszéspontja létrejön, van határozott megoldás (5. és 3. ábra, S_2 és S_3 metszésvonala párhuzamos R-rel).

3. A legutóbbi rendszer 3. egyenletében $5z$ helyére $4z$-t írva c_0 és c_1 távolsága egyenlőnek adódik b_0 és b_1 távolságával, és c_1 ugyanazon irányú eltolással jön létre c_0-ból, mint b_1 a b_0-ból, így $B_0B_1C_1C_0$ paralelogramma (a 7. ábrán C_1', B_1', a többi változatlan). A rendszer ellentmondó, S_3 párhuzamos S_2-vel.

A következők dolgozataiból összeállítva, kiegészítésekkel

Gecsey László (Budapest, József A. g.)
Nagy Klára (Makó, József A. g.)
Treer Mária (Budapest, Kaffka M. g.)
Mátrai Miklós (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g.)