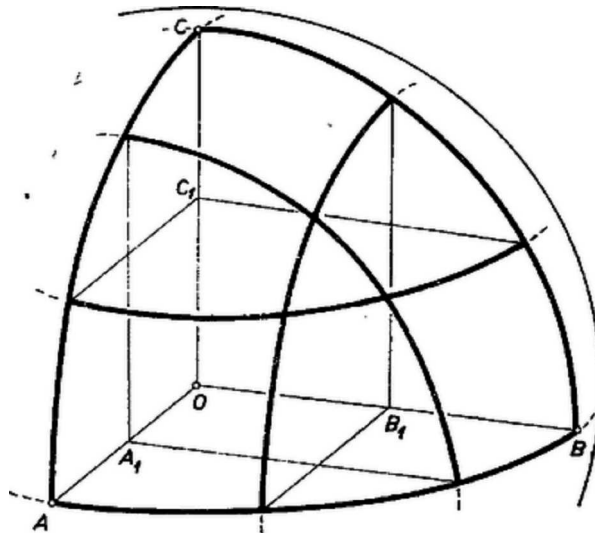
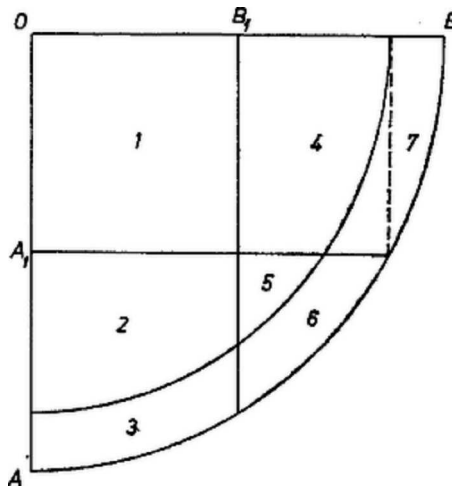


Az ugyanazon gömbátmérőre merőlegesen állított 3 sík párhuzamos egymással, középsőjük főkört metsz ki a gömbből, a másik két gömbátmérő e főkörnek is átmérője. A kimetszett 3 főkör a nyilvánvaló szimmetria miatt a gömb felületét 8 egybevágó és egyformán felosztott gömbháromszögre vágja szét, ezért elég az egy ilyenben létrejött gömbfelületi részek számát meghatározni, ennek 8-szorosa adja az összes részek számát. Az 1. ábra  $ABC$  gömbháromszöge és a benne fekvő gömbi körívek helyett vizsgálhatjuk az alakzatnak az egyik főkör síkjára, pl.  $OAB$ -re való (merőleges) vetületét, mert így a gömbfelületi részek vetületei nem fedik át egymást.



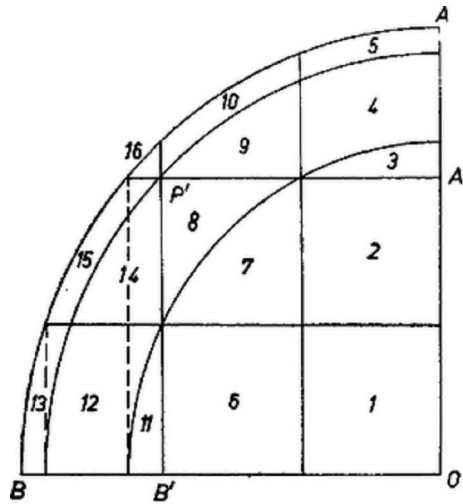
1. ábra



2. ábra

A gömbháromszög vetülete az illető főkör  $OAB$  körcíkke, negyedköre, ennek két határoló sugara a másik két főkör  $AC$ ,  $BC$  negyedívének vetülete (2. ábra); az  $OA$ , ill.  $OB$  gömbsugár  $A_1$ , ill.  $B_1$  felezőpontján át állított sík kimetszette gömbi körökből az  $ABC$  háromszögbe eső negyedíveknek a vetülete az  $OA$ -ra  $A_1$ -ben, ill.  $OB$ -re  $B_1$ -ben merőlegesen állított húrnak a körcíkbe eső fele; végül az  $OC$ -re a  $C_1$  felezőpontján át állított síkkal a gömbből kimetszett kör tekintetbe jövő negyedívének vetülete egy vele egyenlő sugarú  $i$  negyedkör az  $O$  középpont körül.  $i$  sugarának hossza egyenlő a mondott fél húr hosszával (a gömb sugarának  $\sqrt{3}/2$ -szeresével). A fél hurok metszéspontja közelebb van  $O$ -hoz, mint ez a sugár, ezért  $i$  a fél hurokat külön-külön metszi. Így a körcíkben 7 síkrész keletkezik, tehát a fentiek figyelembevételével a 9 kör a gömb felületét  $8 \cdot 7 = 56$  részre darabolja szét.

A három gömbátmérő 6–6 egyenlő részre osztásának esetében hasonlóan eljárva az  $OA$ ,  $OB$  sugarakkal párhuzamosan 2–2 félhúrt, továbbá  $O$  körül két, a fél húrokkal egyenlő sugarú negyedkört kapunk (3. ábra). A szerkesztés szerint a kisebb negyedkör átmegy a fél húroknak azon a 2 metszéspontján, amelyekben egy hosszabb és egy rövidebb fél húr metszi egymást, a nagyobb negyedkör pedig a két rövidebb fél húr  $P'$  metszéspontján. Ennek távolsága  $O$ -tól  $OP' = OA'\sqrt{2} = 2r\sqrt{2}/3$ , ahol  $r$  a gömb sugara.



3. ábra

Legyen  $P$  az  $ABC$  gömbháromszögnek az a pontja, ahol a  $P'$ -ben az  $OAB$  síkra állított merőleges a gömbháromszöget metszi. Így az  $OP'P$  derékszögű háromszögből

$$P'P = \sqrt{r^2 - OP'^2} = \sqrt{r^2 - \frac{8r^2}{9}} = \frac{r}{3},$$

vagyis  $P$  valóban rajta van azon az  $OAB$  síkkal párhuzamos körmetszeten, amelyet az  $OC$  sugár első harmadoló pontján át állított merőleges sík metsz ki a gömbből. Ebből látható, hogy a másik két talált metszéspont is egy-egy olyan gömbfelületi pont vetülete, amelyen 3 körmetszet halad át. Ugyanis  $P$  távolsága a három főkör síkjától  $2r/3$ ,  $2r/3$ ,  $r/3$ , a másik két metszéspont távolságai pedig ezek felcserélésével adódnak (a fél hurok metszéspontjának  $O$ -tól mért távolsága  $r\sqrt{5}/3$ , ezért a gömbfelületi pont magassága az  $OAB$  sík fölött  $2r/3$ ).

Ezek szerint a 3. ábrán látható körcikk síkrészeinek száma 16, és a 3 átmérőt 6–6 egyenlő részre osztó pontok útján adódó 15 kör a gömb felületét  $8 \cdot 16 = 128$  részre osztja.

Hegy István (Kalocsa, I. István g. III. o. t.)

*Megjegyzés.* A 2. ábra 1, 3 és 7, valamint 2, 6 és 4 jelű síkrészeihez tartozó gömbfelületi részek hármásával egybevágók, ugyanis az 1. ábra szerint a gömbi körök alakzatának „háromütemű” ( $120^\circ$ -os) forgási szimmetriája is van, ennek tengelye  $O$ -n, másrészt a 2. ábra „5” jelű síkrészeivel ábrázolt gömbfelületi résznek középpontján megy át. – Hasonlóan hármásával egybevágók a 3. ábra 1, 5, 13, valamint 3, 11, 16, továbbá 7, 9, 14 jelű részeinek megfelelő gömbi részek, végül egybevágók a 2, 4, 6, 12, 10 és 15 jelű részeknek megfelelő gömbfelületi részek; ezek közül 3–3 forgással megy át egymásba, a két hármas egy-egy tagja pedig alkalmas tükrözés utáni esetleges forgással; a 8 jelű rész megfelelőjének középpontján megy át a 3-ütemű forgástengely, valamint az említett tükrözések síkjai.