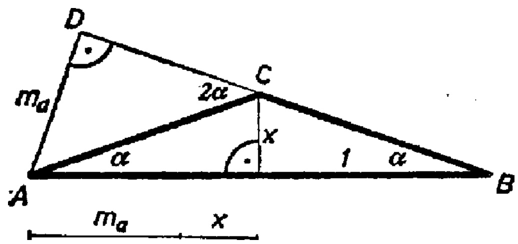
I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $CA = CB$, az A-ból húzott magasság talppontja a BC egyenesen D, a C-ből húzott magasság talppontja[1] E, legyen $AE = 1$ és $CE = x$. Ekkor a közös hegyes szöggel bíró ABD és CBE derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$AD = \frac{AB}{BC} \cdot CE = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}},$$

így a feltevés szerint

$$x + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 1,$$

amiből nyilvánvalóan $0 < x < 1$.



1. ábra

Rendezésekkel és közben négyzetre emeléssel

$$2x = (1-x)\sqrt{1+x^2},$$

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0. \tag{1}$$

A bal oldal első és utolsó tagját tekintve kézenfekvőnek látszik megpróbálni a kifejezés kiegészítését egy $x^2 + Ax \pm 1$ alakú polinom négyzetévé. Ez sikerül, mert az alap harmadik tagjának $+1$-et véve, A értéke gyanánt a bal oldali kifejezés második és negyedik tagjából egyaránt -1 adódik. Így

$$(x^2 - x + 1)^2 = 5x^2,$$

és négyzetgyökvonással, majd újabb rendezéssel

$$x^2 - (1 \pm \sqrt{5})x + 1 = 0. \tag{2}$$

$\sqrt{5}$ előjelét negatívnak véve a diszkrimináns negatív: $(6 - 2\sqrt{5}) - 4 < 0$, így nincs valós gyök. $\sqrt{5}$ előjelét pozitívnak véve a $0 < x < 1$ követelménynek megfelelő gyök, négy tizedes jegyre pontosan

$$x = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2} \approx 0{,}3460.$$

Most már a háromszögnek az alapon levő szögeire $\operatorname{tg} BAC\sphericalangle = x$, így $BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle \approx 19^\circ\, 5'$, és $ACB\sphericalangle = 140^\circ\, 50'$.

Sövényházi Mária (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Az (1) egy szimmetrikus egyenlet (szimmetrikusan elhelyezkedő együtthatói egyenlők), s így megoldható az azokra ismert általános eljárás szerint[2]: x^2-tel való osztás (ugyanis $x = 0$ nem lehet gyök) és $x + 1/x = y$, $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$ helyettesítéssel $y^2 - 2y - 4 = 0$, ami szintén a (2) egyenletre vezet.

Kőszegi László (Baja, III. Béla g. IV. o. t.)

II. megoldás. $CAB\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel $ACD\sphericalangle = 2\alpha$, így $AD = AC \sin 2\alpha$, $CE = AC \sin\alpha$, $AE = \cos\alpha$, és a feltétel szerint, AC-tel mindjárt osztva

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha = \cos\alpha.$$

Átrendezés után négyzetre emelve, majd ismert azonosságok alkalmazásával

$$\sin 2\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha,$$

$$\sin^2 2\alpha = 1 - \sin 2\alpha, \tag{3}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6180, \quad 2\alpha \approx 38^\circ\, 10'. \tag{4}$$

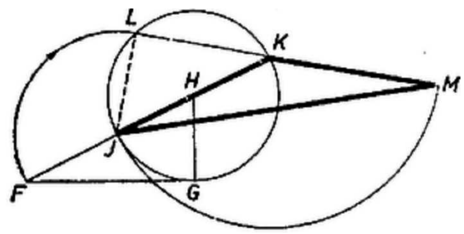
[1] Az ábrán E pótlandó.

[2] Pl. 1176. feladatban látott módon, K. M. L. 26 (1963/1) 56. o.

(A negatív gyököt figyelmen kívül hagytuk, mert α hegyes szög, $2\alpha < 180°$, tehát $\sin 2\alpha > 0$.)

Karsai Kornélia (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (3) egyenletet $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+1) = 1$, másképpen $\sin 2\alpha : : 1 = 1 : (\sin 2\alpha+1)$ alakban írva látjuk, hogy $\sin 2\alpha$ a $\sin 2\alpha + 1$ szakasznak az aranymetszés (folytonos arányosság szerint való osztás) útján keletkezett kisebb része. Ennek alapján az ABC háromszög alakja megszerkeszthető: az FG szakasz G végpontjában emelt merőlegesre felmérjük a $GH = FG/2$ szakaszt, H körül GH sugárral kört írunk, ezt az FH egyenes J-ben és K-ban metszi, $FJ < FK$. Messe az előbbi kört az J körül JF sugárral írt kör L-ben és az LK egyenes a K körül KJ sugárral írt kört M-ben, akkor a JKM háromszög hasonló a szóban forgó háromszöghöz. Állításunk bizonyítását az olvasóra bízzuk (2. ábra).



2. ábra

Simonovits András (Budapest, Radnóti M. gyak. g. II. o. t.)

2. Meghatározhatjuk α-t az

$$AD + CE = 2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 1 \tag{5}$$

egyenletből is. Ebben közelítő módszereket is használhatunk, mert a szögfüggvénytáblázat a szögre a kerekítések miatt általában csak közelítő értéket ad. $\operatorname{tg}\alpha$ helyett a kisebb $\sin\alpha$-t írva $1 = 2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha > 3\sin\alpha$, tehát $\sin\alpha < 1/3 \approx$ $\approx 0{,}3333$, $\alpha < 19{,}47°$. Ha viszont $\sin\alpha$ helyett a nagyobb $\operatorname{tg}\alpha$-t írjuk: $1 < 3\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha > 0{,}3333$, $\alpha > 18{,}43°$. E két korlát még csak kb. foknyi pontossággal zárja körül α-t.

$\alpha = 19{,}47°$ mellett $2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 0{,}6666 + 0{,}3535 = 1{,}0201$, így olyan kisebb szöggel kell próbálkoznunk, amely mellett a bal oldal 0,0201-del kisebbnek adódik. A tg-függvény gyorsabban változik, mint a sin-függvény, ezért a csökkenésből legalább $0{,}0201 : 3 = 0{,}0067$-et $\operatorname{tg}\alpha$ csökkenése útján kell kapnunk:

$$\operatorname{tg}\alpha < 0{,}3535 - 0{,}0067 = 0{,}3468, \quad \alpha < 19{,}12°,$$

$\sin\alpha$ csökkenéséből viszont legfeljebb 0,0067 adódhat: $\sin\alpha > 0{,}3333 - 0{,}0067 = 0{,}3266$, $\alpha > 19{,}06°$.

Innen máris $0{,}1°$-nál kisebb hibával $\alpha = 19{,}1°$.

Máté Zoltán (Bonyhád, Petőfi S. g. IV. o. t.)

3. Másképpen kapunk közelítő értéket a szögre abból az észrevételből, hogy az $y = 2\sin x + \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját a $0 \le x \le \pi/6$ intervallumban $1/2\,\%$-nál kisebb hibával közelíti az $y = 3x$ függvény (x ívmértékben értendő). Ezért jó közelítő érték $3x = 1$-ből $x = 1/3 = 0{,}3333$ radián $\approx 19{,}1°$. Próbát téve (5)-ben az $\alpha = 19{,}0°$, $19{,}1°$ és $19{,}2°$ értékekkel a bal oldal értéke rendre 0,9955, 1,0007, ill. 1,0060, a középső áll legközelebb az előírt 1 értékhez, ezért $0{,}1°$ pontossággal $\alpha = 19{,}1°$.

Dobozy Ottó (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. ált. isk. VII. o. t.)