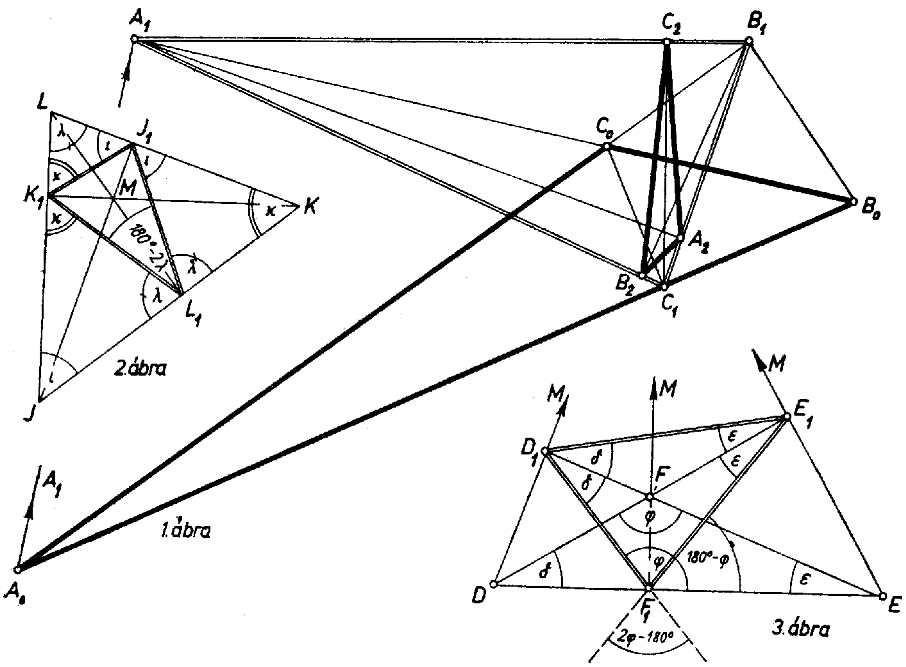
Az 1. ábra $A_0B_0C_0$ háromszögének szögei rendre a feladat adatainak megfelelő $\alpha_0 = 12°$, $\beta_0 = 36°$, $\gamma_0 = 132°$-os szögek, A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 a háromszög magasságvonalai, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 pedig az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög magasságai, $A_2B_2C_2$ a szóban forgó második talpponti háromszög. Az ábráról úgy látszik, hogy az egymásnak megfelelő A_0B_0 és B_2C_2, a B_0C_0 és A_2B_2, továbbá a C_0A_0 és A_2C_2 oldalak szöge lehet 60°-os, de az $A_2B_2C_2$ háromszög $A_0B_0C_0$-hoz képest csak tompaszöggel, s így 120°-kal lehet elforgatva az óramutató járásával megegyező irányban.

Bebizonyítjuk, hogy az utóbbi kapcsolat valóban fenn is áll. Ehhez kiszámítjuk az első és a második talpponti háromszög szögeit, továbbá azt, hogy ezek egyes oldalai mekkora szöggel vannak elfordulva az ábra egyes más oldal–egyeneseihez képest.



1. ábra 2. ábra 3. ábra

Az idézett feladatban közölt összefüggések felhasználásával az $A_1B_1C_1$ háromszög egymás utáni csúcsainál levő szögek nagysága rendre:

$$\alpha_1 = 2\alpha_0 = 24°, \quad \beta_1 = 2\beta_0 = 72°, \quad \gamma_1 = 2\gamma_0 - 180° = 84°,$$

ugyanis az $A_0B_0C_0$ háromszög tompaszögű. Ezek szerint $A_1B_1C_1$ hegyesszögű háromszög, ennélfogva az $A_2B_2C_2$ háromszög egymás utáni csúcsainál levő szög rendre:

$$\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1 = 132° = \gamma_0, \quad \beta_2 = 180° - 2\beta_1 = 36° = \beta_0,$$
$$\gamma_2 = 180° - 2\gamma_1 = 12° = \alpha_0.$$

Eszerint a hasonlóságban az A_2, B_2, C_2 csúcs rendre C_0-nak, B_0-nak, ill. A_0-nak felel meg, és a fent felsorolt oldalegyenes–párok egymás megfelelői.

A háromszög oldalai és talpponti háromszögének egyes oldalai közti szögeket az eredeti háromszög szögeivel kifejezve a 3. ábrán egy tetszés szerinti tompaszögű háromszög esetében mutatjuk be, a 2. ábrán pedig egy hegyesszögű háromszög esetében. A beírt kifejezések bebizonyíthatók abból, hogy egy oldal két végpontjából húzott magasságok talppontjai az oldal, mint átmérő fölé írt Thalész–körön vannak, és így pl. a 3. ábra D, E, E_1, D_1 pontjai ebben a sorrendben, egy konvex húrnégyszög csúcsai.

Az A_0B_0-t A_1C_1 irányba forgatva az elforgatás szöge az óramutató járásával egyirányú és az $A_1C_1A_0\sphericalangle = 180° - \gamma_0 = 48°$ váltószöge, tehát azzal egyenlő. $A_1C_1 = A_1B_2$-t pedig $A_1B_2C_2\sphericalangle = \beta_1 = 72°$ váltószögével elforgatva jutunk C_2B_2 irányú egyeneshez. A két elforgatás összege 120°, és ezt akartuk belátni.

Hasonlóan a B_0C_0, azaz B_0A_1 irányból C_1A_1-be, vagyis B_2A_1-be, ebből pedig B_2C_2-n át B_2A_2-be vivő forgás nagysága $\alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 = 120°$.

E két forgásszög megegyezéséből, valamint az $A_0B_0C_0$ és $C_2B_2A_2$ háromszögek látott hasonlóságából már következik, hogy a két háromszög megegyező körüljárású, így a harmadik megfelelő oldalpár is, tehát a két háromszög a maga egészében is, 120°-os forgással vihető át egymásba. Ezzel meglátásunk helyességét igazoltuk. Eszerint a kérdéses állítás nem igaz, de helyessé válik, ha 60° helyett 120°-ot írunk.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Elegendő egy megfelelő oldalpár elfordulási szögét meghatározni, ha előzetesen megállapítjuk, hogy a kérdéses háromszögek $A_0B_0C_0$, ill. $C_2B_2A_2$ sorrendben való körüljárása megegyező irányú. Nem nehéz, de nem egészen rövid meggondolással belátható, hogy bejárva egy tompaszögű háromszög csúcsait valamilyen sorrendben, másrészt talpponti háromszögének rendre megfelelő csúcsait, ellentétes irányú körüljárásokat kapunk (3. ábra), másrészt hogy hegyesszögű háromszög és talpponti háromszöge azonos körüljárásúak (2. ábra).

2. A kérdés általában való vizsgálata esetén célszerű minden fellépő irányt azzal a szöggel meghatározni, amekkora forgás átvisz egy tetszés szerint választott kiindulási irányból az ugyancsak megválasztott forgási irány mentén az illető irányba. Elegendő tehát egy ún. polárkoordinátarendszerből[1] az alapirányt megválasztani. A pozitív (az óramutató járásával ellentétes) forgás irányában mért forgásszögeket célszerű használni, ha pozitív körüljárású háromszögből indulunk ki. Így esetünkben $+240^\circ$-os, vagyis abszolút értékben nagyobb forgási szög adódott volna.

3. Néhány dolgozat derékszögű koordinátarendszert választott alapul, és hosszabb számítás alapján adott helyes választ a kérdésre.

[1]A polárkoordinátarendszerben a sík egy P pontjának helyzetét úgy határozzuk meg, hogy megadjuk egy előre megválasztott O ponttól – az ún. pólustól – való távolságát, – az ún. rádiusz vektorát –, továbbá, annak a pozitív forgásnak a φ szögét ($0 \leq \varphi < 2\pi$), amely egy előre megválasztott, az O-ból kiinduló félegyenesből – az ún. polártengelyből, alapirányból az OP félegyenesbe átvisz.