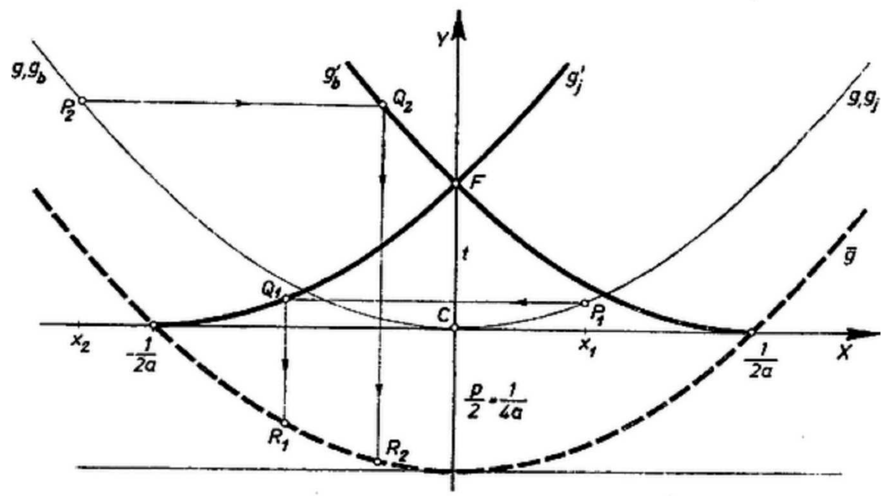
Állítsuk a g parabola síkját magunk elé függőleges helyzetben úgy, hogy a parabola t tengelye függőleges legyen, és C csúcsa lent legyen, vagyis a parabola az i irányvonala fölött legyen. Jelöljük a parabola fókuszát F-fel, paraméterét p-vel.



Mondhatjuk, hogy a Q pont a P pontból a tengely felé való eltolás útján keletkezik. Ha P_1 a parabola jobb oldali ágán van, akkor az eltolás balra történik, a bal oldali ágon levő P_2 esetében viszont jobbra. Arra az esetre, ha P a tengelyen van, vagyis azonos C-vel, a feladat nem határozta meg a felmérés, az eltolás irányát; mi azt vesszük, hogy akkor C akár jobbra, akár balra eltolható. Mivel az eltolás nagysága mindig p, nyilvánvaló, hogy Q mértani helye két parabolaág: g-nek t-től jobbra eső g_j ágát balra toljuk p-vel, t-től balra eső g_b ágát pedig jobbra toljuk p-vel. Q csak az így előálló g_j'-n vagy g_b'-n lehet, és e vonalak bármely Z pontjához van olyan P, amelyből éppen Z-be jutunk. (Q mértani helyének két ága F-ben metszi egymást, mert a parabola fókuszán átmenő és a tengelyre merőleges húrnak a hossza egyenlő a paraméter 2-szeresével, végpontjai az eltolással F-be jutnak.)

A Q-ból R-be vivő eltolás nagysága P haladásával változik, ezt számítással követjük. Legyen g egyenlete $y = ax^2$, ahol $a > 0$, így a parabola szokásos $y^2 = 2px$, $x = y^2/2p$ egyenlet alakjával összehasonlítva $a = 1/2p$, és a paraméter hossza $p = 1/2a$. Legyen a g_j ág egy P_1 pontjának abszcisszája x_1, azaz $x_1 \geq 0$ (megengedjük a $P_1 = C$ esetet is), tehát P_1-nek a tengelytől mért távolsága x_1, ordinátája pedig $y_1 = ax_1^2$. Így a P_1-hől kiindulva keletkező Q_1 koordinátái $\left(x_1 - \dfrac{1}{2a},\, y_1\right)$, tehát az ehhez tartozó R_1 pont $(u,\, v)$ koordinátáira

$$u = x_1 - \frac{1}{2a}, \quad v = y_1 - x_1.$$

Kifejezve P_1 koordinátáit R_1 koordinátáival:

$$x_1 = u + \frac{1}{2a}, \qquad y_1 = v + x_1 = u + v + \frac{1}{2a}, \tag{1}$$

és ezeket beírva az x_1 és y_1 között fennálló összefüggésbe, g egyenletébe, megkapjuk u és v összefüggését, az R_1 mértani helyét tartalmazó vonal egyenletét:

$$u + v + \frac{1}{2a} = a\left(u^2 + \frac{u}{a} + \frac{1}{4a^2}\right) = au^2 + u + \frac{1}{4a},$$

$$v = au^2 - \frac{1}{4a}. \tag{2}$$

Itt $-1/4a = -p/2 < 0$, eszerint R_1 mindig rajta van azon a $\overline{g}$ parabolán, amely g-ből úgy keletkezik, hogy azt eltoljuk a tengellyel párhuzamosan; az irányvonal felé a paraméter felével; más szóval $\overline{g}$ fókusza a C pont, csúcsérintője az i egyenes.

Fordítva, ha $\overline{g}$-nak egy R_1 $(u,\, v)$ pontjára $u \geq -1/2a$, akkor (1) szerint $x_1 \geq 0$ és

$$y_1 = u + au^2 - \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} = a\left(u^2 + \frac{u}{a} + \frac{1}{4a^2}\right) = a\left(u + \frac{1}{2a}\right)^2 = ax_1^2,$$

tehát van g_j-nek olyan P_1 pontja, amelyből az előírás szerint R_1-be jutunk, R_1 hozzátartozik a mértani helyhez. $u < -1/2a$ esetén viszont ilyen P_1 pont nincs. Ezek szerint $\overline{g}$-nak az $u \leq -1/2a$ egyenestől jobbra eső íve hozzátartozik a mértani helyhez.

Hasonlóan ha P_2 a g_b ág egy pontja, azaz $x_2 \le 0$, akkor P_2-nek a tengelytől mért távolsága $|x_2| = -x_2$, ordinátája $y_2 = ax_2^2$, és a fenti számítás így alakul:

$$Q_2\left(x_2 + \frac{1}{2a}, y_2\right), \quad R_2\left(x_2 + \frac{1}{2a} = u, \quad y_2 - |x_2| = y_2 + x_2 = v\right),$$

$$x_2 = u - \frac{1}{2a}, \quad y_2 = v - u + \frac{1}{2a},$$

$$v - u + \frac{1}{2a} = a\left(u^2 - \frac{u}{a} + \frac{1}{4a^2}\right), \quad v = au^2 - \frac{1}{4a}.$$

Eszerint R_2 is $\overline{g}$-on van, pontosabban $\overline{g}$-nak $u \le 1/2a$ ívén, és a fentiekhez hasonlóan látható, hogy ez az ív is része R mértani helyének, és az előbbi ívvel együtt megadják a mértani hely összes pontjait, ugyanis a fenti két módon g minden pontjához megszerkesztettük R-et.

A két ív teljesen lefedi $\overline{g}$-t, és a $-1/2a \le u \le 1/2a$ ív pontjához P két helyzetéből is eljuthatunk. Ezek szerint R mértani helye az eredeti parabolából eltolással áll elő, a tengellyel párhuzamosan az irányvonal felé a paraméter felével.

Fodor Zsuzsa (Bp., Radnóti M. gyak. g. IV. o. t.)