**I. megoldás.** Jelöljük az $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$ számnégyest $Q_i$-vel, a benne előforduló legnagyobb értéket $m_i$-vel ($i = 0, 1, 2, \ldots$). A képezési szabály szerint világos, hogy ha $i$ legalább 1, akkor $Q_i$ egyik száma sem negatív, és ennek folytán $m_{i+1} \leq m_i$, ugyanis $Q_{i+1}$ számai két-két $Q_i$-beli, tehát nem negatív szám különbségének abszolút értékeként adódnak, tehát nem nagyobbak a két szám nagyobbikánál. Bebizonyítjuk, hogy ha a legnagyobb szám nem 0, akkor a negyedik lépésig legkésőbb határozottan csökken a négyes legnagyobb száma: ha $m_i > 0$, akkor $m_{i+4} < m_i$. Ebből nyilvánvaló, hogy a nem negatív egész számokból álló $m_1, m_2, \ldots$ számsorozatban véges számú lépés után fellép egy 0 tag, ez pedig azt jelenti, hogy a megfelelő számnégyes minden tagja 0.

Bizonyításunk egyszerűbb lesz a következő két észrevétel felhasználásával. $d_1$ képezése mutatja, hogy $d_0$-t és $a_0$-t az eredeti számnégyesben ugyanúgy szomszédos tagoknak tekinthetjük, mint pl. $a_0$-t és $b_0$-t. Ezért a $b_0$, $c_0$, $d_0$, $a_0$ számnégyesből kiindulva a számnégyeseknek lényegében ugyanarra a sorozatára jutunk, mint az eredeti négyesből. Ugyanaz áll a $d_0$, $c_0$, $b_0$, $a_0$ négyesből képezett sorozatra. Ezek alapján bármely $i(\geq 0)$ index esetén $Q_i$ tetszés szerinti tagját tekinthetjük $a_i$-nek, szomszédai egyikét $b_i$-nek, a szomszéd másik szomszédját $c_i$-nek, így a hátra levő tag $d_i$ gyanánt szomszédja lesz az először kiválasztott tagnak, amint az eredeti elrendezésben is az volt.

Ha $Q_i$-ben nem szerepel $m_i$ értékű elem szomszédjaként 0, akkor már $m_{i+1} < m_i$, s így biztosan $m_{i+4} < m_i$. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, ha van $Q_i$-ben egy $m_i$ értékű elem mellett 0. Az előrebocsátott megjegyzések szerint feltehetjük, hogy $Q_i$ ilyen alakú:

$$v, \qquad m_i, \qquad 0, \qquad w,$$

ahol $v$ és $w$ nem negatív egészek és nem nagyobbak $m_i$-nél. Ekkor $Q_{i+1}$ az

$$m_i - v, \qquad m_i, \qquad w, \qquad |v - w|$$

számnégyes lesz. $Q_{i+2}$-ben csak akkor nem lesz minden szám kisebb, mint $m_i$, ha $Q_{i+1}$-ben előfordul egymás mellett az $m_i$ és 0 érték, tehát vagy $v = m_i$ vagy $w = 0$, vagy pedig $v - w = 0$ és e mellett $w$ és $m_i - v$ egyike $m_i$-vel egyenlő, vagyis $v = w = m_i$ vagy $w = v = 0$. Ez azt jelenti, hogy a harmadik lehetőség mindkét változata az első két lehetőség valamelyikének speciális esete, így elég azokkal foglalkozni.

Ezekben az esetekben $Q_{i+1}$ a $0, m_i, w, m_i - w$, vagy az $m_i - v, m_i, 0, v$ négyes, és a kettő nem különbözik lényegesen ($w$ és $m_i - v$ játszik azonos szerepet a két négyesben). Elég tehát az első négyessel foglalkozni. Ekkor $Q_{i+2}$ az

$$m_i, \qquad m_i - w, \qquad |m_i - 2w|, \qquad m_i - w$$

négyes. Itt $m_i$ és 0 érték egymás mellett csak úgy szerepelhet, ha $w = m_i$, minden más esetben $Q_{i+3}$ számai kisebbek $m_i$-nél. Ha pedig $w = m_i$ akkor $Q_{i+2}$ az

$$m_i, \qquad 0, \qquad m_i, \qquad 0$$

négyes, így $Q_{i+3}$ és $Q_{i+4}$ az

$$m_i, \quad m_i \quad m_i, \quad m_i \qquad \text{ill. a} \qquad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

négyes. Az állításnál valamivel élesebben azt kaptuk tehát, hogy vagy $Q_{i+4}$ már csupa 0-ból áll, vagy már $m_{i+3} < m_i$.

Mint láttuk, ebből a feladat állítása következik.

*Szilágyi Tivadar* (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

**II. megoldás.** Ha egy $Q$ számnégyes mindegyik száma osztható egy $D$ számmal, akkor a számok különbségei is oszthatók $D$-vel: a megfelelő két szám $D$-ed része különbségének a $D$-szeresei. Így, ha a $Q$ négyes számainak a $D$-ed részéből alkotott négyes $Q'$, akkor $Q$-ból és $Q'$-ből képezve a feladat előírása szerint újabb négyeseket, ezekben két egymásnak megfelelő szám közül vagy mindkettő 0, vagy egyik sem. Így egy négyest úgy is helyettesíthetünk kisebb számokból állóval, ha a négy szám nem relatív prím, hogy mindegyiket osztjuk ugyanazzal a közös osztóval.

Megmutatjuk, hogy bármely számnégyesből kiindulva legkésőbben a negyedik lépésben minden elem páros szám, tehát $D = 2$-vel egyszerűsíthetünk. Elég lesz evégett a páros számok helyére $P$-t, a páratlanok helyére $U$-t írni. Ebből megállapíthatjuk a továbbképezéssel adódó számok párosságát is, figyelembe véve, hogy két megegyező párosságú szám különbsége páros, két ellentétes párosságúé pedig páratlan.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a négyes három eleme páratlan, egy páros; feltehetjük ekkor az I. megoldásban tett megállapítások szerint, hogy az utolsó elem páros. Ekkor a további négyesek így alakulnak:

$$\begin{array}{lllll} Q_0 & U, & U, & U, & P, \\ Q_1 & P, & P, & U, & U, \\ Q_2 & P, & U, & P, & U, \\ Q_3 & U, & U, & U, & U, \\ Q_4 & P, & P, & P, & P, \end{array}$$

állításunknak megfelelően.

Már csak a $P, P, P, U$ esetet kell megvizsgálnunk, mert a fenti sorozatban előfordul négy páratlan számból álló négyes is ($Q_3$) és két-két páros és páratlan számból állónak a két lényegesen különböző típusa is ($Q_1$, ill. $Q_2$). Ezekből 4-nél kevesebb lépésben jutunk $Q_4$-höz. A hátra lévő $P, P, P, U$ típus 1 lépésben a fenti $Q_1$-re vezet, tehát 4 lépésben $Q_4$-re.

Ezek szerint valóban legkésőbben minden 4. lépésben egyszerűsíthetünk $D=2$-vel, és így $m$ is felére csökken. Ha előbb nem érjük el a 0, 0, 0, 0 számnégyest, akkor eljutunk egy olyan négyesre, mely már csak a 0 és 1 elemekből áll. Minden ilyen számnégyes megkapható a fent vizsgált típusokból, ha $P$ helyére 0-t, $U$ helyére 1-et írunk, és ekkor legkésőbben a 4. lépésben 0, 0, 0, 0-ra jutunk.

*Bóta Károly* (Budapest, Steinmetz M. g. I. o. t.)