I. megoldás. I. A szám jegyeit rendre A, B, C-vel jelölve a feltételek szerint

$$2B = A + C, \tag{1}$$

$$(10^2A + 10B + C)(10^2C + 10A + B) = (10^2B + 10C + A)^2. \tag{2}$$

(2)-ben beszorzás és rendezés után egyszerűsíthetünk $10^3 - 1$-gyel:

$$A^2 - 10B^2 + 10AC - BC = 0, \tag{3}$$

és innen B-t (1) alapján kiküszöbölve

$$A^2 - 3AC + 2C^2 = 0. \tag{4}$$

Nyilván $C \neq 0$, mert különben $A = 0$, majd $B = 0$ következnék. Másrészt az együtthatók összege $1 - 3 + 2 = 0$, tehát $A = C$-vel az egyenlet teljesül, vagyis a bal oldal osztható az $A - C$ különbséggel. Szorzattá alakítás után

$$(A - C)(A - 2C) = 0,$$

ez pedig csak $A - 2C = 0$, $A = 2C$ mellett teljesülhet, mert A és C feltevés szerint különbözők, $A - C \neq 0$. Így (1)-ből $B = 3C/2$.

Ezek szerint C páros számjegy, másrészt $A = 2C \leq 9$, mert A szintén számjegy, ezért $C < 5$; így csak a következő két számjegyhármas felelhet meg:

$$C = 2, \quad A = 4, \quad B = 3; \qquad C = 4, \quad A = 8, \quad B = 6,$$

tehát a szóban forgó szám 432 vagy 864. Valóban $432 = 16 \cdot 27 = 2^4 \cdot 3^3$ és $243 = 3^5$ mértani középarányosa $2^2 \cdot 3^4 = 324$, a feladat állításainak megfelelően. Ugyanez áll a 864 számra is, melynek jegyei rendre 2-szer nagyobbak.

II. Tegyük fel, hogy az $\overline{ABC}$ számnak akkor is megvannak a feltételekben kimondott tulajdonságai, ha a számot a b-alapú (bázisú) számrendszerben felírva gondoljuk, vagyis (2)-ben 10 helyett b-t írunk ($b \geq 2$, egész szám). A fentiek mintájára, közben $b^3 - 1$-gyel egyszerűsítve – ami $\neq 0$ – a (3) és (4) egyenletek helyére a következők lépnek:

$$A^2 - bB^2 + bAC - BC = 0, \tag{3'}$$

$$(b - 4)A^2 - 2(b - 1)AC + (b + 2)C^2 = 0. \tag{4'}$$

A bal oldalt A és C polinomjának tekintve itt is 0 az együtthatók összege, tehát $A - C$ a bal oldalból kiemelhető:

$$\left[(b-4)A^2 - (b-4)AC\right] - \left[(b+2)AC + (b+2)C^2\right] =$$

$$= (A - C)[(b - 4)A - (b + 2)C] = 0.$$

Továbbra is kizárjuk azt az érdektelen esetet, amelyben $A = C = B$, így a második tényező 0, amiből, mindjárt (1)-re tekintettel

$$(b - 4)A = (b + 2)C, \tag{5}$$

$$A = \frac{(b+2)C}{b-4} > C, \qquad B = \frac{(b-1)C}{b-4} > C. \tag{6}$$

(A $b - 4 = 0$, $b = 4$ esetet később vizsgáljuk.) Nem lehet, hogy C osztható legyen $b - 4$-gyel, különben

$$A = (b + 2)\frac{C}{b - 4} \geq b + 2,$$

holott a b alapú számrendszerben a legnagyobb számjegy $b - 1$. Ezért B csak úgy egész, ha $b - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója $b - 4$-gyel. Ez a közös osztó csak 3 lehet, mert ennyi a két szám különbsége, viszont két szám közös osztója a különbségüknek is osztója, és 3-nak 1-nél nagyobb osztója csak önmaga. Legyen $b - 1 = 3k$, ahol k egész szám, és $b > 4$ miatt $k > 1$, vagyis a számrendszer alapszáma $b = 3k + 1$ alakú. Így (6)-ból

$$B = \frac{kC}{k - 1}, \quad A = \frac{(k+1)C}{k-1} = B + \frac{C}{k - 1},$$

kell tehát, hogy C többszöröse legyen $k - 1$-nek: $C = m(k - 1)$, ahol m természetes szám. Ekkor

$$B = km, \qquad A = km + m = (k + 1)m.$$

Itt $m<3$, különben ugyanis $A\geq 3k+3=b+2$. $m=2$-vel viszont $k>1$ miatt mindig teljesül $A=2k+2\leq 3k=b-1$, vagyis $A=2k+2$ a b alapú számrendszerben számjegy. Így m lehetséges értékei 1 és 2.

Ezek szerint minden $k\geq 2$ egész szám mellett a $3k+1$ alapú számrendszerben az

$$A=k+1,\quad B=k,\quad C=k-1$$

és

$$A=2(k+1),\quad B=2k,\quad C=2(k-1)$$

számjegyekkel felírt $\overline{ABC}$ számoknak megvan a vizsgált tulajdonsága, vagyis mindig áll

$$\overline{CAB}\cdot\overline{ABC}=\overline{BCA}^2.$$

Pl. a $b=7$-es számrendszerben $k=2$, ezért A, B, $C=3$, 2, 1, ill. 6, 4, 2; az elsővel $321_7=162=2\cdot 3^4$, $132_7=72=2^3\cdot 3^2$, $213_7=108=2^2\cdot 3^3$, az utóbbi szám valóban mértani közepe az előbbi kettőnek.

$b=4$ esetén (5)-ből, majd (1)-ből $C=0$, $A=2B$, másrészt $A\leq 3$, így A egyetlen lehetséges értéke $A=2$, ennélfogva $B=1$. A tízes rendszerre átírva $\overline{ABC}=210_4=36$, $\overline{CAB}=021_4=9$, $\overline{BCA}=102_4=18$, és valóban $36\cdot 9=18^2$. Ebben a számrendszerben csak egy számnak van meg a vizsgált tulajdonsága.

Lénárt Zoltán (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. (mindjárt tetszőleges alapú számrendszerre). Gyorsabban jutunk eredményre, ha az (1) feltevést

$$A-B=B-C=d,\quad \text{azaz}\quad A=B+d,\ C=B-d$$

alakban írjuk, ahol d egész szám. Ekkor a b alapú számrendszerben ($b\geq 3$) a (2) egyenlet így alakul:

$$\left[(B+d)b^2+Bb+B-d\right]\left[(B-d)b^2+(B+d)b+B\right]$$

$$=\left[Bb^2+(B-d)b+(B+d)\right]^2,$$

$$d(b^3-1)\left[-db+3B+d\right]=0.$$

Innen $d\neq 0$ és $b\neq 1$ miatt

$$B=\frac{(b-1)d}{3},\qquad A=\frac{(b+2)d}{3},\qquad C=\frac{(b-4)d}{3}.$$

$B\geq 0$ miatt $d>0$, $A>B>C$, másrészt $A\leq b-1$ miatt $d\leq 2$, d nem egyszerűsíthető 3-mal, ezért A, B, C-re egész megoldást csak akkor kapunk, ha $b-1=3k$. $b=4$ és $d=2$ esetén $A>b-1$ nem megoldás, minden más megfelelő b esetén két megoldás van.

Szalkai István (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

v