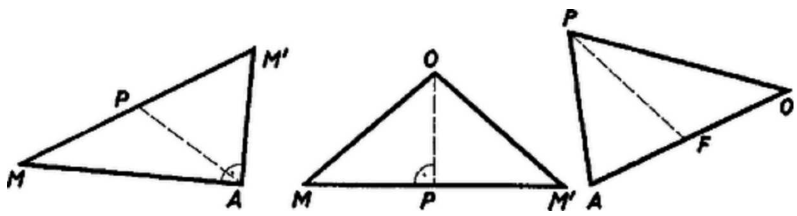
Legyen az adott G gömb középpontja O, sugara R, az adott pont A, továbbá G-nek egy az A-ból derékszögben látható húrja (ha van ilyen) MM', és ennek felezőpontja P.



1. ábra

P egyszersmind az $MM'A$ derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, ezért $PA = PM$. Másrészt P – ha különbözik O-tól – az OMM' egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja, ezért $PO^2 + PM^2 = OM^2$, és az előbbi egyenlőség figyelembevételével

$$PO^2 + PA^2 = R^2 \tag{1}$$

(Ez akkor is érvényes, ha P és O egybeesnek, mert ekkor $PA = OA = OM = R$, A a G gömbön van. Fordítva, ha A a G felületén van, akkor nyilvánvaló, hogy G-nek csak az átmérői láthatók A-ból derékszögben, ezért a keresett mértani hely egyetlen pontból áll: O-ból. Ezt a helyzetet tovább figyelmen kívül hagyjuk.)

(1)-ből következik, hogy P-nek az AO szakasz F felezőpontjától mért távolsága állandó, ugyanis PF az OAP háromszögben az OA oldalhoz tartozó súlyvonal, ezért ismert összefüggés szerint

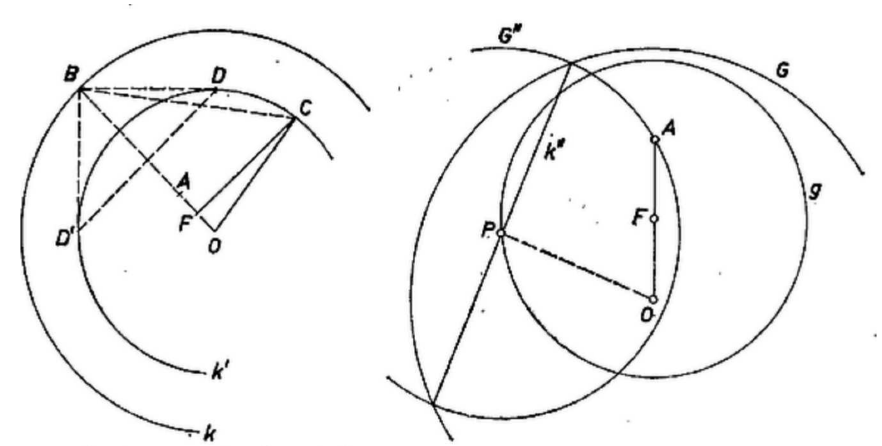
$$PF^2 = \frac{1}{4}[2(PO^2 + PA^2) - OA^2] = \frac{1}{4}(2R^2 - OA^2), \tag{2}$$

ami állításunkat igazolja. Egyszersmind azt is látjuk, hogy a feltételnek megfelelő P pont (s így egyben A-ból derékszögben látszó húr is) csak akkor van, ha ez a kifejezés nem negatív, tehát ha $OA^2 \le 2R^2$. Ezt a továbbiakban feltesszük. Ha itt a „$<$" jel érvényes, akkor P rajta van egy az F pont körül írt g gömb felületén, amelynek sugara

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - OF^2}, \tag{3}$$

tehát a keresett mértani hely része ennek a gömbfelületnek. Az $OA^2 = 2R^2$ esetre később visszatérünk.

Bebizonyítjuk, hogy g felületének minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. A mértani hely pontjai nyilván csak G belső pontjai lehetnek, ezért először azt látjuk be, hogy g minden pontja G belsejében van. (3) szerint $OF < R/\sqrt{2}$, tehát F benne van az O körül $R/\sqrt{2}$-sugárral írt G' gömb belsejében, így G-ben is. G-nek F-hez legközelebbi pontja az OF félegyenesen levő gömbsugár B végpontja. Így azt kell megmutatnunk, hogy $r \le BF$.



2. ábra

Messe egy az OA egyenesen átmenő sík G-t és G'-t a k, ill. k' körben. Húzzuk meg k'-nek az F-en átmenő, OF-re merőleges húrját, legyen ennek egyik végpontja C. Így r-et megadja CF; az $r = CF \le BF$ állítás pedig egyértelmű azzal, hogy a BCF derékszögű háromszög C-nél levő hegyesszöge nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a B-nél levő hegyesszöge, más szóval, hogy a B-nél levő szög kisebb, mint 45°, vagy egyenlő vele.

A k'-höz B-ből húzott érintők érintési pontját D-vel és D'-vel jelölve a k' bármely pontjához B-ből húzott félegyenes a DBD' szögtartomány belsejében halad vagy annak határán, tehát $CBF\sphericalangle \le DBF\sphericalangle$. A BOD derékszögű háromszögből viszont $BD^2 = BO^2 - DO^2 = R^2/2 = DO^2$, ez a háromszög egyenlő szárú, és így $DBO\sphericalangle = DBF\sphericalangle = 45^\circ$.

Eszerint állításunk helyes, g-nek nincs pontja G-n kívül. Maga B sem lehet rajta g felületén, mert $BF = r = CF$ csak akkor teljesül, ha C azonos D-vel vagy D'-vel, ekkor azonban F felezi OB-t, tehát A azonos B-vel, ezt az esetet viszont kizártuk.

Megmutatjuk most már, hogy g-nek tetszés szerinti P pontjához megadható G-nek olyan MM' húrja, amely A-ból derékszögben látszik, és amelynek felezőpontja P. Írjunk P körül PA sugárral G'' gömböt. G és G'' egy k'' körben metszik egymást, amely nem fajul ponttá, ugyanis a két gömbsugár különbsége kisebb középpontjaik távolságánál:

$$R - PA < PO, \qquad \text{azaz} \qquad PO + PA > R,$$

mert az utóbbi egyenlőtlenségben mindkét oldal pozitív, tehát az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor $(PO+PA)^2 > R^2$, ez pedig (1) miatt teljesül. (Ugyanis P különbözik O-tól is, A-tól is, mert az $r = OF = AF$ feltevés a kizárt $OA = R$-re vezet.)

k''-nek bármely MM' átmérője megfelel állításunknak: A-ból derékszögben látszik, és felezőpontja P. Az utóbbi feltétel teljesül, mert k'' középpontja P, vagyis k'' a G''-nek főköre. Valóban, k'' minden M pontjára $MP = PA$ és $MO = R$, ezért (2) és (3) alapján

$$MP^2 = PA^2 = 2FP^2 - OP^2 + \frac{OA^2}{2} = R^2 - OP^2 = MO^2 - OP^2,$$

tehát az MPO szög derékszög, k'' a P-n átmenő és OP-re merőlegesen álló síkban van. Így viszont az első feltétel is teljesül, mert k'' átmérői egyben G''-nek is átmérői, és így a G'' felületén levő A-ból Thalész tétele szerint derékszögben láthatók. (Maga A nincs rajta k''-n, mert k'' a G-n van, A pedig nincs rajta.) Ezek szerint a keresett mértani helyet $OA^2 < 2R^2$ esetén a g felületén levő pontok alkotják.

Az $OA^2 = 2R^2$ esetre nyilvánvaló, hogy annak a kúpnak, melynek alkotói az A-ból G-hez húzható összes érintők, a félnyílásszöge $45°$, és így A-ból csak olyan húrok láthatók derékszögben, melyek mindkét végpontja a kúp és G érintkezési körén van, és az ilyenek is csak akkor, ha a mondott körnek átmérői. Ekkor viszont P a mondott kör középpontja. Könnyű belátni, hogy e középpont egyben az OA szakasz felezőpontja.

Lukonics Gábor (Aszód, Petőfi S. Gimn., IV. o. t.)