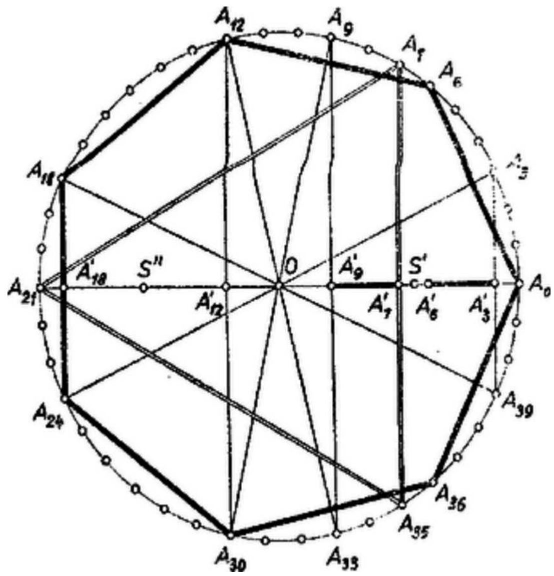
I. megoldás.[1] **1.** Az állítást tömegpontrendszerek súlypontjára vonatkozó meggondolásokkal bizonyítjuk. Az m_1 tömegű P_1 pont és m_2 tömegű P_2 pont súlypontján azt az m_1+m_2 tömegű S pontot értjük a P_1P_2 szakaszon, amelyre $P_1S/SP_2 = m_2/m_1$. Több tömegpontból álló rendszer súlypontjához úgy juthatunk, hogy vesszük két tömegpont súlypontját, majd sorra már tekintetbe vett pontok súlypontjának és egy további tömegpontnak a súlypontját, míg minden pont sorra nem kerül. Az egyes pontokban elhelyezett tömegekre ható (párhuzamosnak feltételezett) nehézségi erők eredője a súlypontban ható és az ahhoz rendelt tömegnek megfelelő nehézségi erővel egyenlő. Világos, hogy egy síkban levő pontrendszer súlypontja ebben a síkban van.



Fel fogjuk használni, hogy egy tömegpontrendszer súlypontja független a pontok sorrendjétől, és hogy részekre osztva a pontrendszert, az egyes részrendszerek súlypontjainak súlypontja az egész rendszer súlypontja.

Ha egy szabályos n-szög minden csúcsába egységnyi tömeget helyezünk, akkor a rendszer súlypontja a *sokszög középpontja* (a körülírt kör középpontja) n egységnyi tömeggel. Valóban, ha a sokszöget a középpont körül a teljes körülfordulás n-ed részével forgatjuk el, akkor önmagába megy át, tehát súlypontja változatlan marad. Forgatásnál azonban egyedül a forgatás középpontja nem mozdul el, tehát itt van a súlypont.

Esetünkben az A_0, A_6, A_7, A_{12}, A_{18}, A_{21}, A_{24}, A_{30}, A_{35}, A_{36} egységnyi tömegű pontokból álló R rendszer súlypontja is a kör O középpontja, mert felbontva az A_7, A_{21}, A_{35} pontok szabályos háromszöget alkotnak (két-két pont közt a kör 14 negyvenketted része van), a maradó pontok pedig szabályos hétszöget (két-két pont közt a kör 6 negyvenketted része van). Így mindegyik részrendszer súlypontja O, tehát az R rendszeré is.

Ugyancsak O a súlypontja a körön átellenes A_0 és A_{21} pontokba helyezett tömegek alkotta R_1 rendszernek is. Így a többi 8 tömegpont R_2 rendszerének súlypontja ugyancsak O, mert különben az R_1 és R_2 egyesítésével újra adódó R súlypontja nem lehetne O.

Bontsuk fel R_2-t két rendszerre, 4–4 tömegponttal, az egyik A_6, A_7, A_{35}, A_{36}, a másik A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{30}. E részrendszerek S', ill. S'' súlypontja az O-ra tükrös pontpár, mert az újraegyesítéssel visszanyert R_2 súlypontja csak így lesz O. S' az A_0A_{21} átmérőn van, mert az A_6, A_{36} és A_7, A_{35} pontpárok a kiindulási pontrendszerben erre az átmérőre tükrösek, így az első pontpár súlypontja az egybeeső $A'_6 \equiv A'_{36}$ pont, az utóbbié ugyanígy A'_7, egyaránt 2–2 egységnyi tömeggel, ennélfogva S' azonos az $A'_3A'_7$ szakasz felezőpontjával. Hasonlóan S'' az $A'_{12}A'_{18}$ szakasz felezőpontja.

Ábránkat O-ra tükrözve A_{12}, A_{18}, A_{24}, A_{30} rendre az A_{33}, A_{39}, A_3, A_9 pontba megy át, S'' pedig ezek szerint az $A'_3A'_9$ szakasz felezőpontjába, másrészt fenti megállapításunk szerint S'-be. Azt kaptuk tehát, hogy az A_0A_{21} egyenes $A'_6A'_7$ és $A'_2A'_9$ szakaszainak felezőpontja közös. Így pedig az $A'_3A'_6$ és $A'_7A'_9$ szakaszok egymás tükörképei a mondott felezőpontra nézve, tehát egyenlők.

II. megoldás. Legyen a kör sugara egységnyi. A rövidebb A_0A_3, A_0A_6, A_0A_7, A_0A_9 ívhez tartozó középponti szög (ívmértékben mérve) π-nek rendre: $3/21 = 1/7$része, ill. $2/7$, $1/3$, $3/7$ része. Ezért a szóban forgó vetületi pontoknak a kör O középpontjától mért távolságai rendre

$$OA'_3 = \cos\frac{\pi}{7}, \quad OA'_6 = \cos\frac{2\pi}{7}, \quad OA'_7 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad OA'_9 = \cos\frac{3\pi}{7},$$

mindegyik pozitív és csökkenő sorozatot alkotnak. Ezekkel a vizsgálandó szakaszpár különbsége

$$d = A'_9A'_7 - A'_6A'_3 = \frac{1}{2} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}, \tag{1}$$

[1]Ezt a megoldást *Kárteszi Ferenc* bocsátotta rendelkezésünkre.

erről kell megmutatnunk, hogy 0-val egyenlő.

Jelöljük $\pi/7$-et δ-val és fejezzük ki a d-t $y=\cos\delta$-val. Felhasználva a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned}
&\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,\\
&\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha -\\
&\qquad - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,
\end{aligned}$$

adódik

$$d = -4y^3 + 2y^2 + 2y - \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Másrészt 3δ kiegészítő szöge 4δ, tehát fennáll:

$$\cos 3\delta + \cos 4\delta = 0. \tag{3}$$

Innen a fentiek és a

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

azonosság alapján

$$8y^4 + 4y^3 - 8y^2 - 3y + 1 = 0. \tag{4}$$

Ez az egyenlet négy y értékre teljesülhet, minden olyan $\cos\ z = y$-ra, amely mellett teljesül a (3)-nak megfelelő $\cos 3z + \cos 4z = 0$, vagyis $3z + 4z = 7z = (2k+1)\pi$, ahol k egész szám. Mindjárt ilyen $z=\pi$, ekkor $y=-1$, ez tehát (4) egyik gyöke, a bal oldalból kiemelhető az $y+1$ gyöktényező. A hányados $8y^3 - 4y^2 - 4y + 1$, tehát a további gyökökre

$$8y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0. \tag{5}$$

Ez fennáll $\cos\delta$-ra is (mert $\cos\delta$ nem azonos a leválasztott gyökkel, hiszen $\delta < \pi/2$, és ezért $\cos\delta = y > 0$).

Vegyük észre, hogy (5) bal oldalán (2)-nek -2-szerese áll. Eszerint $-2d = 0$, és így $d = 0$. Ezt akartuk bizonyítani.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak. g.)

Megjegyzés. A fenti meggondolást folytatva (5) teljesül minden

$$z = (2k+1)\frac{\pi}{7} = (2k+1)\delta$$

értékre, és ha $2k+1$ nem osztható 7-tel, mindezekkel $d=0$. Ebből további, a feladatban kimondotthoz hasonló egyenlőségek fennállására következtethetünk, ezek azonban lényegesen új összefüggést nem adnak, a feladatban szereplő szakaszokból egyszerű transzformációkkal kaphatók.