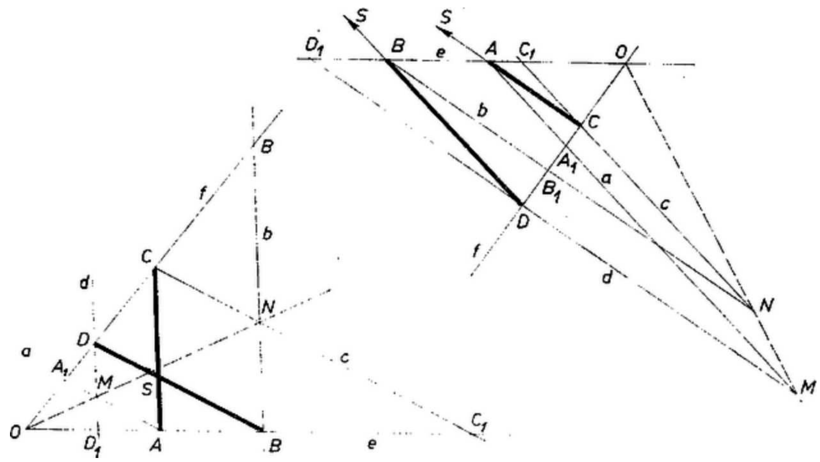
I. megoldás. α) Jelöljük az A, B, C, D ponton át az előírás szerint meghúzott egyenest rendre a, b, c, d-vel, az a, d egyenespár metszéspontját M-mel, a b, c egyenespárét N-nel. Ekkor az MN álló megy át e-nek és f-nek O metszéspontján és felezi a köztük levő 2 pár csúcsszög egyikét.

Állítjuk, hogy M is, N is egyenlő távolságra van e, f mindegyikétől. Ehhez megmutatjuk, hogy a MAB és MCD háromszögek területe egyenlő, és ugyanígy az NAB, NCD háromszögpáré is. Ebből következik, hogy az M-ből, ill. N-ből húzott magasságaik egyenlők, mert az e-n fekvő AB és az f-en fekvő CD alapjaik egyenlők.



1. ábra és *2. ábra*

Az AC és BD egyenesek metszéspontját S-sel jelölve a szerkesztés folytán az $AMDS$ és a $CNBS$ négyszög paralelogramma. Ekkor, az idomok területét ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat, a szerkesztés folytán valóban

$$MAB = MAS = MSD = MCD \quad \text{és} \tag{1}$$

$$NAB = NSB = NCS = NCD. \tag{2}$$

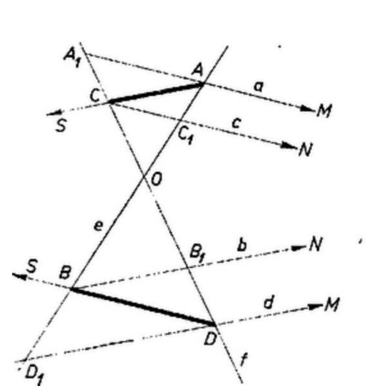
Így M is, N is az e, f egyenespár valamelyik szögfelezőjén van.

β) Azt kell még belátnunk, hogy M és N az egyenespár ugyanazon szögfelezőjének pontja, vagyis az egyenespárral meghatározott 4 szögtartomány közül vagy ugyanabban vannak, vagy pedig két csúcsszögtartományban. Ha az adott pontok O-nak ugyanazon oldalán vannak és a sorrend e-n: O, A, B, f-en pedig O, D, C (1. ábra), akkor a és b-nek f-fel való metszéspontját A_1-gyel, ill. B_1-gyel,[1] c és d-nek e-vel való metszéspontját C_1-gyel, ill. D_1-gyel jelölve a pontok sorrendje e-n D_1, A, B, C_1, f-en pedig A_1, D, C, B_1. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a metszéspontok O-nak ugyanazon oldalán vannak, mint az adott pontok, továbbá hasonló háromszögekből $OD_1 = OA{\cdot}OD/OC < OA$, $OC_1 = OB \cdot OC/OD > OB$, és ugyanígy $OA_1 < OD$, és $OB_1 > OC$. Ennélfogva ADA_1D_1 és BCB_1C_1 konvex négyszögek, és benne vannak a $180°$-nál kisebb AOC szögtartományban, tehát ez áll átlóiknak M, ill. N metszéspontjára is.

C és D sorrendjét az előbbihez képest megfordítva feltehetjük, hogy $OA > OC$ (ugyanis $OA = OC$ esetén $BD \parallel AC$, a paralelogramma elfajul, az átló határozatlan). Ekkor A_1 és B_1 a CD szakaszon vannak (2. ábra), mert

$$CB_1 = \frac{OC}{OA} \cdot AB < AB = CD \quad \text{és} \quad DA_1 = \frac{OD}{OB} \cdot BA < BA = DC,$$

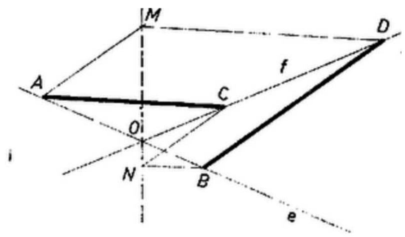
ugyanis $OD = OC + CD < OA + AB = OB$. Ezért A_1 közelebb van d-hez, mint C (azaz mint A), tehát A-ból A_1 felé haladva közeledünk d-hez, ezért a és d-nek M metszéspontja A_1-en túl adódik, abban a szögtartományban, amely az AOC szögtartománnyal az OC félegyenes mentén határos. Ugyanez áll N-re is, mert B_1 közelebb van c-hez, mint D és B.



3. ábra

[1] Az ábrán B_1 indexe pótlandó.

Hasonló maggondolás mutatja, hogy M és N akkor is az e és f közti 4 szögtartomány közül ugyanabban vannak, ha O az AB és CD szakaszok mindegyikének pontja (3. ábra). Ha viszont O az AB és CD szakaszok egyikén rajta van, másikán nem, akkor M és N két csúcsszögtartományban van (4. ábra), tehát ekkor is ugyanazon szögfelező egyenes pontjai.



4. ábra

Ha A, B, C és D közül egy vagy kettő az O-ban van, akkor M és N egyike azonos O-val, ezért az utóbbi vizsgálat felesleges, vagy a paralelogramma határozatlan, az állításnak nincs értelme.

Kuzmann Ernő (Budapest, I. István g. IV. o. t.)
dolgozatából, kiegészítve a β) résszel.

Megjegyzés. A β) rész 4 esetét egyszerre intézhetjük el, ha (1)-ben és (2)-ben a háromszögek körüljárási irányát is tekintetbe vesszük. A felhasznált háromszögek felírt körüljárása (1)-ben is, (2)-ben is egyező, mert az első és a harmadik lépésben az elhagyott és az új csúcs összekötő egyenese párhuzamos a megmaradó oldallal – pl. $BS \parallel MA$ –, a második lépésekben pedig az $AMDS$, ill. $CNBS$ paralelogramma MS, ill. NS átlóján másodszor az elsővel ellentétes irányban haladtunk végig.

Ha mármost M és N az e egyenes ugyanazon oldalán vannak, akkor az MAB és NAB háromszögek körüljárása megegyező. Ezért egyezik egymással MCD és NCD körüljárása is, tehát M és N az f-nek is ugyanazon oldalán vannak, vagyis az e és f közti 4 szögtartomány közül ugyanabban. Ha pedig e szétválasztja az M, N pontpárt, akkor az MAB és NAB körüljárások iránya ellentétes, ugyanez áll az MCD és NCD körüljárásra is, tehát M-ből N-be haladva e és f mindegyikét átlépjük, M és N két csúcsszögtartományban van.

II. megoldás. Az 1. ábrán az OC_1C szög szárait átmetszik a $BN = b$ és AC párhuzamos egyenesek, ezért $C_1N : NC = C_1B : BA$; másrészt a C_1OC szög szárait a C_1C, BD és AA_1 párhuzamosok, ezért $C_1B : BA = CD : DA_1 = BA : DA_1 = AO : A_1O = C_1O : CO$, tehát $C_1N : NC = C_1O : CO$. Eszerint a C_1OC háromszögben a C_1OC szög felezője a C_1C oldalt N-ben metszi. Hasonlóan adódik, hogy OM is felezi az e és f közti szöget.

Minthogy azonban a háromszög szögfelezőjének osztásarányára vonatkozó, itt felhasznált tétel a külső szög felezőjére is érvényes – hacsak a háromszög nem egyenlő szárú –, azért itt is bizonyítani kell, hogy M és N ugyanazon szögfelező pontjai.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
dolgozata, kiegészítéssel.

Nincs szükség annak külön bizonyítására, hogy az MN átló átmegy O-n, ha a koordinátageometria módszereivel bizonyítjuk az állítást:

III. megoldás. Válasszuk az e és f egyenesek O metszéspontját a derékszögű koordinátarendszer origójának, és legyenek a rendszer tengelyei e és f szögfelezői. Így az AB és CD szakaszoknak a tengelyeken levő vetületei egyenlő hosszúak. Az abszcissza tengelyen való vetületüket p-vel és e iránytényezőjét m-mel jelölve az ordinátatengelyen levő vetületük mp, az X tengelyt úgy választva ki és úgy irányítva, hogy p, m pozitívok legyenek ($m = 0$ mellett f egybeesnék e-vel, $p = 0$ mellett szintén). Legyen A és C abszcisszája x_1, ill. x_2, így B abszcisszája $x_1 + p$, D-é pedig $x_2 + p$, vagy $x_2 - p$ aszerint, hogy D abszcisszája nagyobb mint C-é, vagy kisebb. Így az összes koordináták:

$$A(x_1,\, mx_1), \quad B\big[x_1+p,\, m(x_1+p)\big], \quad C(x_2,\, -mx_2),$$
$$D\big[x_2 \pm p,\, -m(x_2 \pm p)\big].$$

(p kétféle előjeli lehetőségét később fogjuk szétválasztani.) Ezekből a szükséges irányok iránytényezői:

$$AC: \quad \frac{m(x_1+x_2)}{x_1-x_2} = m', \qquad\qquad BD: \quad \frac{m(x_1+x_2+p \pm p)}{x_1-x_2+p \pm p} = m''.$$

Felírjuk az ezekkel B-n és D-n át, ill. A-n és C-n át húzott b, d, a, ill. c párhuzamos egyenes egyenletét, majd abból a két tengellyel való metszéspontjuk abszcisszáját, ill. ordinátáját:

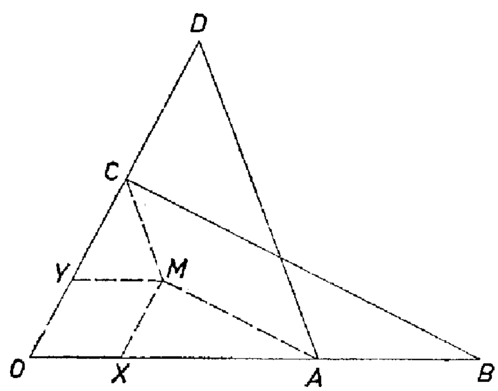
$b:\qquad y-m(x_1+p)=m'(x-x_1-p),$
$d:\qquad y+m(x_2\pm p)=m'(x-x_2\mp p),$
$a:\qquad y-mx_1=m''(x-x_1),$
$c:\qquad y+mx_2=m''(x-x_2)$

X-et metszik rendre az alábbi abszcisszán:	Y-t metszik rendre az alábbi ordinátán:
$b_1=\dfrac{2x_2(x_1+p)}{x_1+x_2}$,	$b_2=-m'b_1=-\dfrac{2mx_2(x_1+p)}{x_1-x_2}$;
c	
$d_1=\dfrac{2x_1(x_2\pm p)}{x_1+x_2}$,	$d_2=-m'd_1=-\dfrac{2mx_1(x_2\pm p)}{x_1-x_2}$;
$a_1=\dfrac{2x_1(x_2\pm p)}{x_1+x_2+p\pm p}$,	$a_2=-m''a_1=-\dfrac{2mx_1(x_2\pm p)}{x_1-x_2+p\mp p}$;
c	
$c_1=\dfrac{2x_2(x_1+p)}{x_1+x_2+p\pm p}$,	$c_2=-m''c_1=-\dfrac{2mx_2(x_1+p)}{x_1-x_2+p\mp p}$;

Ezek szerint, ha p előtt a felső előjel érvényes, akkor $b_2=c_2$, és $d_2=a_2$, vagyis mind a b, c, mind a d, a egyenespár az Y-tengelyen metszi egymást, ha pedig az alsó előjel érvényes, akkor $b_1=c_1$ és $d_1=a_1$, vagyis egyenespárjaink metszéspontjai az X-tengelyen vannak.

A $+p$ esetére vonatkozó állításunk nem érvényes, ha x_1, x_2, mert így b_2, d_2, a_2 és c_2, nevezője 0. Ez esetben az állításnak sincs értelme, mert $AC\parallel BD\parallel Y$, a kérdéses paralelogramma nem jön létre. Hasonló elfajulás adódik, ha $-p$ esetében $x_1=-x_2$, ekkor $AC\parallel BD\parallel X$.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)



5. ábra

IV. megoldás. Megmutatjuk, hogy az A-n át BC-vel és C-n át AD-vel húzott párhuzamosok M metszéspontja az egyik szögfelezőn van. Az OA és OC szögszárakkal párhuzamos szakaszoknak tulajdonítsunk pozitív vagy negatív előjelet, amint a szakasz OA-val, ill. OC-vel egyirányú vagy ellentétes irányú. Az M ponton át OC-vel párhuzamos egyenes messe az OA egyenest az X pontban, az OA-val párhuzamosan húzott egyenes OC-t Y-ban. Ekkor az OBC és XAM, továbbá az ODA és YCM háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, így a háromszögek hasonlók és körüljárásuk is megegyező, tehát a betűzés sorrendjében a megfelelő oldalpárok vagy mind egyező, vagy mind ellentétes irányúak. Ezért a szögszárakkal párhuzamos oldalak arányát felírva, az előjeles távolságokra fennáll

$$\frac{OB}{XA}=\frac{OC}{XM}=\frac{OC}{OY}\quad\text{és}\quad\frac{OD}{YC}=\frac{OA}{YM}=\frac{OA}{OX};$$

felhasználtuk, hogy az $OXMY$ paralelogrammában XM és OY, továbbá YM és OX egy irányban párhuzamosak. A törteket eltávolítjuk, az XA és YC távolságokat $OA-OX$, ill. $OC-OY$ alakba írjuk:

$$OB\cdot OY=(OA-OX)\cdot OC,\qquad OD\cdot OX=(OC-OY)\cdot OA,$$

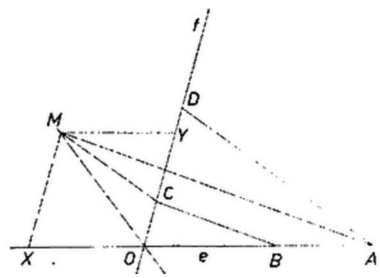
vagy átrendezve

$$OC\cdot OX+OB\cdot OY=OA\cdot OC,\qquad OD\cdot OX+OA\cdot OY=OA\cdot OC.$$

Vonjuk]e a második egyenlőséget az elsőből:

$$(OC-OD)\cdot OX+(OB-OA)\cdot OY=0,\quad\text{vagy}\quad DC\cdot OX+AB\cdot OY=0.$$

Itt CD és AB egyenlő hosszúak. Ha az előbbi OC-vel, az utóbbi OA-val egyirányú, vagy mindkettő ellentétes irányú, akkor a nyert egyenletből $OX = OY$ következik, ha pedig az egyik szakaszpár egyirányú, a másik ellentétes irányú, akkor $OX = -OY$.



6. ábra

Azt nyertük tehát, hogy az $OXMY$ paralelogramma rombusz, s így OM az XOY szög szögfelezője. Ez a szög az AOC szög, vagy a csúcsszöge, ha az OA és AB, valamint OC és CD egyirányúak, vagy mindkét pár ellentétes irányú. Ha viszont a két pár egyike egyirányú, a másika ellentétes irányú, akkor az M pont az AOC szöget 180°-ra kiegészítő csúcsszögpár szögfelezőjén van. Ebből az is következik, hogy ha A és B, továbbá C és D szerepét egyidejűleg felcseréljük, akkor ismét ugyanazon a szögfelezőn levő pontot kapunk; másrészt az így nyert N pont a feladatban leírt paralelogramma M-mel átellenes csúcsa. Az MN átló tehát valóban az e, f egyenesek egyik szögfelezőjén van.

Megjegyzés: A fenti megoldás azt is adja, hogy ha AB és CD nem egyenlők, az MN egyenes akkor is átmegy O-n. Valóban, akkor is fennáll $OX/OY = AB/CD$, tehát az $OXMY$ paralelogramma alakja csak az AB, CD (irányított) szakaszok arányától függ. A és B, továbbá C és D egyidejű felcserélésével tehát egy az előbbihez hasonló $OX'NY'$ paralelogrammához jutunk, amiből következik az állítás, ami egyébként az I. megoldásból is könnyen kiolvasható.