A 762. gyakorlatban)[1] talált feltétel

$$c^2+cf+f^2+de=0,$$

és ez az adott értékrendszer mellett teljesül. Valóban így

$$a_2=\frac{a_1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_1},\quad a_3=\frac{a_2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_2}=\frac{a_1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a_1},\quad a_4=\frac{a_3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a_3}=a_1,$$

hacsak $1-\sqrt{3}a_1\neq 0$ és $1+\sqrt{3}a_1\neq 0$, azaz $a_1\neq\pm 1/\sqrt{3}$. A további a_3, a_6, a_7, ... tagok gyanánt a_2, a_3 és a_1 ismétlődnek, megint periódikusan, mivel a számsorozat minden tagját az (1) értelmezés szerint csupán a közvetlenül megelőző tagból képezzük.

Képletünk emlékeztet a goniometriából $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-ra ismert azonosságra. Valóban, írjunk a_1 helyett tg α-t – ezt bármely megengedett a_1 szám esetén tehetjük, mert a tg x függvény minden valós értéket felvesz –, továbbá vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{3}=\operatorname{tg}60^\circ$; így

$$a_2=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}60^\circ}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}60^\circ}=\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ).$$

Eszerint megkeresve egy olyan α szöget, amelyre $\operatorname{tg}\alpha=a_1$, a következő tagot az α-nál 60°-kal nagyobb szög tangense is megadja. Ez tovább is fennáll, mert mondtuk már, hogy minden tag képezésében csak a közvetlen megelőző tagot használjuk fel. Így

$$a_3=\operatorname{tg}\big[(\alpha+60^\circ)+60^\circ\big]=\operatorname{tg}(\alpha+120^\circ)\quad\text{és}$$
$$a_4=\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha,$$

mert a tg x függvény periódikus és periódusa 180°.

A kizárt $a_1=1/\sqrt{3}$-hoz $\alpha=30^\circ$, $a_1=-1/\sqrt{3}$-hoz pedig $\alpha=-30^\circ$ tartozik, ezekkel $a_2=\operatorname{tg}90^\circ$, ill. $a_3=\operatorname{tg}90^\circ$ adódnék. Ez nem létezik, ez a tény mutatkozott meg már előre a kizárás szükségességében.

Ezzel megadtuk a kívánt természetű magyarázatot.

Kiss Katalin (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A 762. gyakorlatban (1)-hez használt $c=f=1$, $d=-e=1=\operatorname{tg}45^\circ$ értékrendszer mellett hasonló magyarázat adható a sorozat tagjainak négyesével periódikusan való ismétlődésére.

Hasonlóan, ha $c=f=1$, és $d=-e=\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ ahol n természetes szám, akkor az (1) sorozatban $a_{n+1}=a_1$, és általában bármely k természetes számra $a_{n+k}=a_k$. (Itt is vannak a_1 számára kizárt értékek.)

Gyárfás András (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

[1] K. M. L. 26 (1963/2) 62. o. (6) egyenlőség.