

I. megoldás. A szokásos jelöléseket használva válasszuk a betűzést úgy, hogy $a = \sqrt{bc}$, azaz $a^2 = bc$; így azt kell belátnunk, hogy $\alpha \leq 60^\circ$.

A koszinusz-tétel és a feltevés szerint

$$\begin{aligned}(b - c)^2 &= b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + 2bc \cos \alpha - 2bc = 2bc \cos \alpha - bc = \\ &= 2bc \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

A bal oldal nem negatív, ezért a jobb oldal sem, így

$$\cos \alpha - \frac{1}{2} \geq 0, \quad \cos \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \alpha \leq 60^\circ.$$

Földeáki Mária (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. IV. o. t.)

II. megoldás. Ugyancsak a koszinusz-tételből kiindulva, majd felhasználva még a pozitív számok számtani és mértani közepeire vonatkozó ismert egyenlőtlenséget is:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - 3bc}{2bc} = \\ &= 2 \left(\frac{\frac{b + c}{2}}{\sqrt{bc}} \right)^2 - \frac{3}{2} \geq 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

amiből ismét $\alpha \leq 60^\circ$.

Csörnyei Zoltán (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)