Az egyenlet bal oldala az x, y ismeretlenekre szimmetrikus. Ha tehát

$$x_1 = a, \qquad y_1 = b$$

egy megfelelő megoldása az egyenletnek, vagyis egyrészt

$$a^2 - ab + b^2 = n, \tag{1}$$

másrészt a, b pozitív egész számok – akkor megoldás az

$$x_2 = b, \qquad y_2 = a$$

számpár is, és ez az előbbitől különböző, ha

$$a \neq b. \tag{2}$$

Továbbá a bal oldal mindegyik tagja másodfokú. Ezért az előbbi számok helyére negatívjukat téve ismét megoldást kapunk:

$$x_3 = -a, \quad y_3 = -b; \quad x_4 = -b, \quad y_4 = -a,$$

és ezek az előbbiektől különbözők, valamint (2) miatt egymástól is, más szóval akkor, ha $x_1 \neq y_1$.

Az $a^2 - ab + b^2 = (a^2 + b^2) - ab$ kifejezés az alábbiak szerint két más módon is írható olyan különbség gyanánt, melyben a kisebbítendő két szám négyzetösszege, a kivonandó pedig ugyanezen két szám szorzata:

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab = \\ = (a-b)^2 - a^2 + ab + a^2 = (a-b)^2 - (a-b)a + a^2, \\ = (a-b)^2 + ab - b^2 + b^2 = (a-b)^2 - (a-b)(-b) + (-b)^2. \end{cases} \tag{3}$$

Ezeket (1)-gyel egybevetve egyenletünknek az alábbi x_5, y_5 és x_9, y_9 számpárok is megoldásai, továbbá az a 3–3 további számpár is, amelyet belőlük a fenti mintára, felcseréléssel, ill. az előjelek egyidejű megváltoztatásával kapunk:

$$\begin{aligned}
x_5 &= a - b, & y_5 &= a; \\
x_6 &= y_5 = a, & y_6 &= x_5 = a - b; \\
x_7 &= -x_5 = -a + b, & y_7 &= -y_5 = -a; \\
x_8 &= -y_5 = -a, & y_8 &= -x_5 = -a + b; \\
x_9 &= a - b; & y_9 &= -b; \\
x_{10} &= y_9 = -b, & y_{10} &= x_9 = a - b; \\
x_{11} &= -x_9 = -a + b, & y_{11} &= -y_9 = b; \\
x_{12} &= -y_9 = b, & y_{12} &= -x_9 = -a + b;
\end{aligned}$$

ugyanis $a - b$ is egész szám.

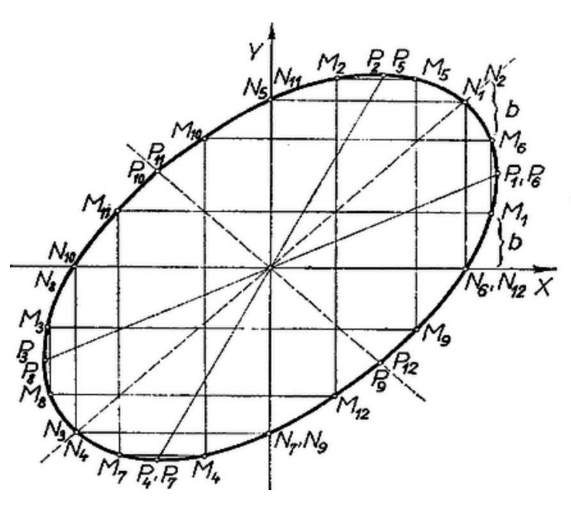
Az első négy sorban álló megoldás egymástól különböző, mert ennek feltétele (az első négy megoldás mintájára) $x_5 \neq y_5$, ami teljesül, mert $b > 0$. Hasonlóan a második négyben $x_9 \neq y_9$, mert $a > 0$. Annak feltételét kell még megkeresnünk, hogy a különböző négytagú megoldás–csoportokban ne legyenek egyező megoldások.

$x_6 = x_1$ ezért kell, hogy álljon $y_6 \neq y_1$, azaz

$$a - b \neq b, \quad \text{másképpen} \quad a \neq 2b. \tag{4}$$

Hasonlóan $x_{12} = x_2$ ezért kell $y_{12} \neq y_2$, azaz

$$-a + b \neq a, \quad \text{azaz} \quad b \neq 2a. \tag{5}$$



Így az első csoport mindegyik megoldása különbözik mind a második, mind a harmadik csoport megoldásaitól. Nyilvánvaló ugyanis, hogy x-et és y-t egy pont derékszögű koordinátáinak tekintve az $M_3(x_3,\, y_3)$, $M_2(x_2,\, y_2)$ és $M_4(x_4,\, y_4)$ pontok az $M_1(x_1,\, y_1)$ pontból az origóra, ill. a tengelyek közti szögek szögfelezőire való tükrözéssel állnak elő, és $a \neq 0$, $b \neq 0$, valamint $b \neq a$ miatt a négy pont abszcisszája különböző. Továbbá az M_1, M_2, M_3, M_4 pontnégyes a fenti tükrözésekkel bármelyik pontjából kiindulva is előáll. Mindez a második és a harmadik csoport megoldásainak megfelelő pontnégyesekre is érvényes, ezért a közös abszcisszájú M_6 és M_1, valamint M_{12} és M_2 pontpár tagjainak (4) és (5) szerinti különbözősége miatt az M_6-ból és az M_{12}-ből előálló pontnégyes különbözik M_1, M_2, M_3, M_4-től, és ez állításunkat bizonyítja.

Hasonlóan a második és harmadik csoport megoldásai különbözők, mert $x_5 = x_9$, de $y_5 \neq y_9$. (Másképpen: $a > b$ esetén – amit nyilván feltehetünk – a második csoport mindegyik megoldásában x és y értéke ugyanolyan előjelű, viszont a harmadik csoport összes megoldásaiban x és y értéke ellentett előjelű.)

Mindezek szerint ha az adott egyenletnek a feltétel szerinti megoldásában x és y értékei nem egyenlők, és egyik sem 2-szerese a másiknak, – ez elegendő ahhoz, hogy az adott egyenletet legalább 12 egész számpár elégítse ki, a fent felsorolt megoldások.

Szilágyi Tivadar (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha a feltétel szerinti megoldásban $a = b$ – ami szerint (4) és (5) teljesül –, akkor a fenti x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$) megoldásoknak megfelelő N_i pontok közül csak 6 különböző. Hasonlóan ha $c^2 - cd + d^2 = n$, $c > 0$ és $c = 2d$, akkor az a, b számpár helyén c, d-t véve a $P_i(x_i,\, y_i)$ pontok között szintén csak 6 különböző. Ugyanazon n mellett ilyen a, b és c, d megoldás lehetetlen, mert az első esetben $n = a^2$, négyzetszám, a másodikban viszont $n = 3d^2$, nem négyzetszám.

Megállapításunk nem azt mondja, hogy ha az adott egyenlet valamely $(a,\, b)$ megoldására $a = b$, vagy $a = 2b$, vagy $b = 2a$, akkor az adott egyenlet egész megoldásainak száma kevesebb 12-nél, csupán azt, hogy ilyen megoldásból a fentiek szerint csak 5 további megoldást lehet leszármaztatni. Lehetséges ugyanis, hogy az $a = b$ vagy $a = 2b$ feltételt teljesítő megoldáson kívül van más a (2), ill. (4), ill. (5) feltételt teljesítő megoldás is. Pl. $n = 7^2$ esetén egy megoldás $a = b = 7$, de megoldás $a' = 8$, $b' = 3$ is, továbbá $n = 3 \cdot 7^2$ esetén megoldás $b = 7$, $a = 2b = 14$, de kielégíti az egyenletet $a' = 13$, $b' = 2$ is, így az $x^2 - xy - y^2 = 49$ és az $x^2 - xy - y^2 = 147$ egyenletek egész megoldásainak száma legalább 18.

2. A második és harmadik megoldáscsoporthoz a (3) átalakítások helyett az alábbi meggondolással is eljuthatunk. Az adott egyenlet x-re is, y-ra is másodfokú, ezért egyikük értékét megválasztva a másikra legfeljebb 2 megoldás van, s azok egyikét a feltevésből ismerve a másikat kiszámíthatjuk. Pl. tudva, hogy $x = a$ mellett az egyik megoldás $y = b$, a másik az

$$a^2 - ay + y^2 = n, \quad \text{azaz} \quad y^2 - ay + a^2 - n = 0 \quad \text{egyenletből}$$

$y = a - b$, hiszen itt a két gyök összege a. Hasonlóan az $y = b$ melletti, $x = a$-tól különböző gyök az $x^2 - bx + b^2 - n = 0$ egyenletből $x = b - a$. Ezek szerint minden $(x_0,\, y_0)$ megoldásból két új megoldást kapunk a következő két módon:

$$x' = x_0, \quad y' = x_0 - y_0; \qquad\qquad x'' = y_0 - x_0, \quad y'' = y_0,$$

hacsak $y' \neq y_0$, ill. $x'' \neq x_0$. Kiindulva pl. a fenti M_1 ponthoz tartozó megoldásból az első és második mód váltakozó alkalmazásával sorra a fenti M_6, M_{10}, M_4, M_7, M_{11} ponthoz tartozó megoldást kapjuk, majd M_{11}-ből ismét M_1-et. Hasonlóan kapcsolódnak egymáshoz az M_2, M_{12}, M_8, M_3, M_9 M_5, és az N_1, N_6, N_8, N_3, N_7, N_5 pontokhoz tartozó megoldások. Viszont P_1-ből ($x = 2b$, $y = b$) az első módon indulva önmagába jutunk.

3. Az adott egyenlet írható

$$\frac{\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2n} + \frac{\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2n/3} = 1$$

alakban, eszerint annak az ellipszisnek az egyenletével van dolgunk, melynek középpontja az origó, nagy tengelye az X tengelyhez képest $+45°$-kal van elfordulva, fél nagytengelye $\sqrt{2n}$, fél kistengelye $\sqrt{2n/3}$. Fentebb ennek az ellipszisnek az $x = a$, ill. $y = b$ egyenessel való második metszéspontját határoztuk meg.