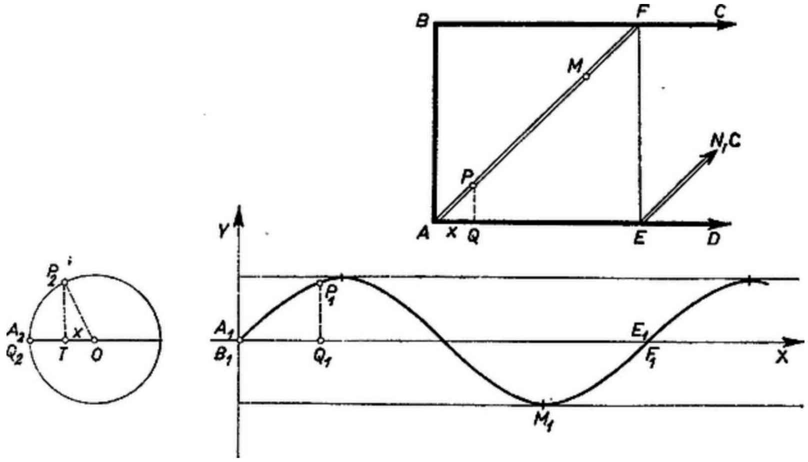
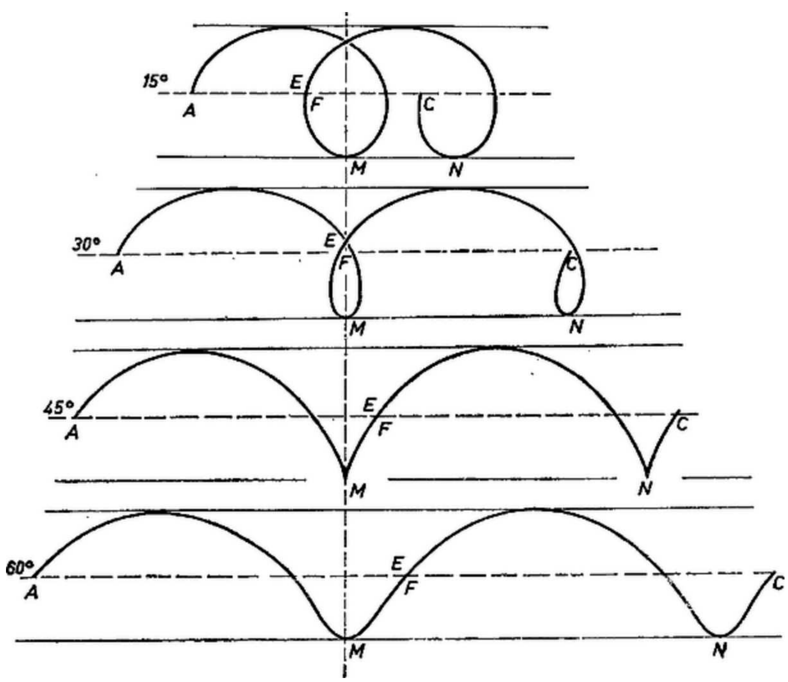
I. Tartsuk a hengerpalástot vízszintes tengellyel szemünk magasságában úgy, hogy AD legyen a hozzánk legközelebbi alkotó, és tekintsük a palást vetületét egy függőleges S_1 síkon, amely párhuzamos a tengellyel. Minden pont vetületét a jele után tett 1-es indexszel fogjuk jelölni.



1. ábra

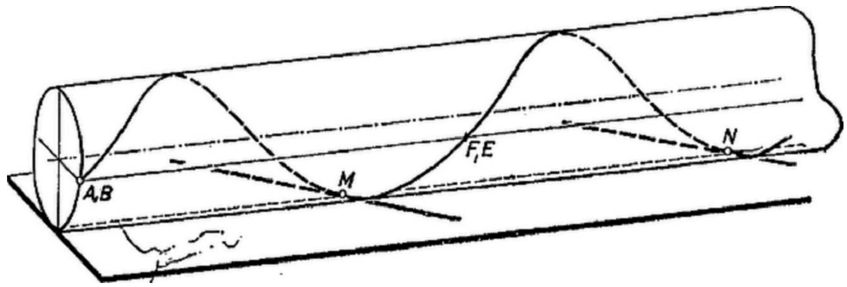
Segítségül vesszük a palástnak egy, a tengelyre merőleges S_2 síkon levő vetületét is; ez kör, kerülete egyenlő AB eredeti hosszával, középpontja legyen O. Ennek a körnek a sugarát választva egységnek, AB hossza 2π egység. Az S_2-n levő vetületeket a betűk után tett 2-es indexszel jelöljük. Az ábrán S_2-t az S_1-gyel való metszésvonala körül S_1-be beforgatva látjuk.



2. ábra

A feladat első részéhez elég az állítást a csavarvonal AF ívére bizonyítanunk. Legyen az eredeti állapotban AF egy pontja P, ennek vetülete AD-re Q, és legyen $AQ = x$, ekkor $QP = x$, mert az $ABFE$ idom négyzet, továbbá az A_2P_2 ív – ami az A_2OP_2 szög ívmértéke, szintén x; legyen egyelőre $x \leq AE/2 = \pi$. P_1-nek A_1E_1-től való távolsága egyenlő S_2-n P_2-nek Q_2O-tól való P_2T távolságával. A P_2OT derékszögű háromszögből adódik, hogy $P_1Q_1 = \sin x$. – Másrészt $A_1Q_1 = x$.

Helyezzünk S_1-re derékszögű koordináta-rendszert A_1-gyel mint origóval, A_1E_1-gyel mint abszcissza-tengellyel és irányítsuk az Y tengelyt fölfelé. Így P_1 koordinátái $A_1Q_1 = x$ és $Q_1P_1 = \sin x$. – Meggondolásaink $\pi < x \leq 2\pi$ esetén is érvényesek. A koordinátarendszerrel vele jár, hogy az A_1E_1 alatt adódó P_1-ek esetében Q_1P_1-et negatívnak vegyük. P_1 akkor adódik A_1E_1 alatt, amikor P_2 a Q_2O egyenes alatt van, vagyis amikor a forgási irányt megtartva a Q_2OP_2 forgás nagyobb $180°$-nál. Ekkor P közelebb volt BC-hez, mint AE-hez, egyszersmind EF-hez is közelebb volt, mint AB-hez, tehát $\pi < x < 2\pi$ és így $\sin x$ is negatívnak adja Q_1P_1-et. Ezek szerint a csavarvonal AF ívén végig futó P pont P_1 vetülete befutja az $y = \sin x$ függvény képének a $(0{,}2\pi)$ intervallumban levő ívét. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.



3. ábra

II. Ha a csavarvonalat függőleges tengely körül 90°-kal elforgatjuk, a két menet vetülete (és akárhányé is) egyetlen kör lesz (az előző helyzetben S_2-n keletkezett kép). Forgassuk most lassan visszafelé a csavarvonalat (a kísérletet elvégezhetjük pl. drótmodellel, amit úgy készíthetünk, hogy a drótot egy hengerre csavarjuk az alkotókkal 45°-ot bezáró irányban tartva), a vonal két menete hurkot fog mutatni a kör helyett, és a hurok egyre keskenyedik. Abban a pillanatban, amikor a hurok eltűnik, a menetek alsó M, ill. N pontjában (amelyek az AF, ill. EC ív 3/4 részében vannak) csúcsot látunk, pl. az AM és MF ívek az M-ből fölfelé kiinduló félegyenest érintik ellenkező oldalról. Továbbfordítással a csavarvonal képe M-ben még igen hirtelen kanyarodó, de törés nélküli görbét mutat, amely az eredeti helyzetig forgatva végül a fent látott görbébe megy át.

Az átlátszó lemezre gondolva képzeljük, hogy összehajlítás előtt az M és N pontban hozzátűztünk egy papírlapot, amin megrajzoltuk az AF és ED egyenest. Az összehajlítás után a vízszintesen hagyott papírlapon ezek az egyenesek az M, ill. N pontban érinteni fogják a csavarvonalat. Képük a csavarvonal forgatása közben mindig az MN egyenes lesz és érinteni fogja ezekben a pontokban a vetület-görbét – kivéve, amikor merőlegessé válnak S_1-re (amikor a csavarvonal tengelye 45°-os szöget zár be S_1-gyel), ekkor az egyenesek vetülete egy-egy pont, M, ill. N lesz, amelyek ekkor csúcsai a görbének.

Ezek szerint csúcsos vetületet akkor kapunk, amikor a vetítés iránya 45°-os szöget zár be az alkotóval, egyszersmind a tengellyel is.

Folly Gábor (Budapest, Piarista g. III. o. t.)