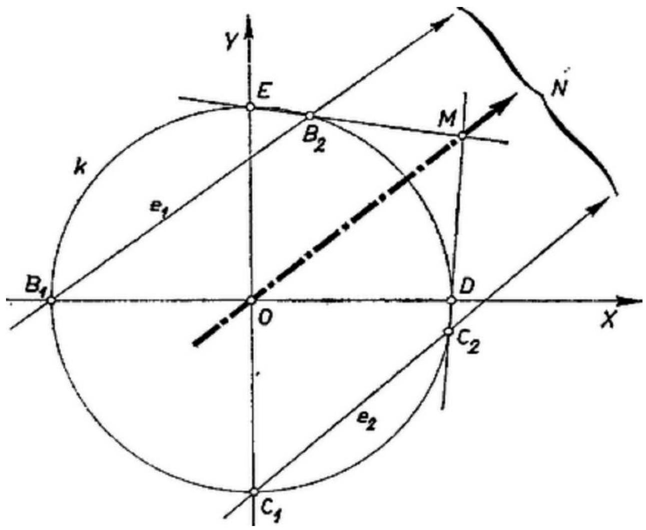
I. megoldás. Az összekötő egyenes megszerkesztéséhez célszerű lesz alkalmasan választani a k kört. Mivel e_1 átmegy a $(-1;\,0)$ ponton, e_2 pedig a $(0;\,-1)$ ponton, egyszerű számítás várható, ha k-nak az O origó körül egységnyi sugárral rajzolt kört választjuk. Ennek egyenlete $x^2+y^2-1=0$. Válasszuk továbbá a $(-1;\,0)$ pontot B_1-nek és legyen a $(0;\,-1)$ pont C_1. Ilyen választás mellett a további pontok koordinátái is racionális számok lesznek.

Az e_1 és e_2 egyenesek rajzlapunkról kieső N metszéspontjának koordinátáira az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert megoldva

$$x_N=385/27, \qquad y_N=309/27$$

adódik, a keresett ON egyenes egyenlete tehát $y=309x/385$, és azt kell megmutatnunk, hogy a C_2D és B_2E egyenesek metszéspontja ezen az egyenesen van. Az itt szereplő pontok koordinátái:

$$B_2:\ \left(\frac{7}{25},\ \frac{24}{25}\right), \qquad C_2:\ \left(\frac{55}{48}\cdot\frac{4608}{5329},\ -\frac{721}{5329}\right)=\left(\frac{5280}{5329},\ -\frac{721}{5329}\right),$$
$$E:\ (0;\,1), \qquad D:\ (1;\,0).$$



1. ábra

A C_2D és B_2E egyenesek egyenletei, majd M metszéspontjuk koordinátái:

$$C_2D:\quad y=\frac{721}{49}(x-1)=\frac{103}{7}(x-1), \qquad B_2E:\quad y-1=-\frac{1}{7}x,$$
$$M:\ \left(\frac{55}{52},\ \frac{103\cdot 3}{7\cdot 52}\right).$$

M abszcisszáját az ON egyenes egyenletének jobb oldalába helyettesítve

$$\frac{309}{385}x_M=\frac{309}{385}\cdot\frac{55}{52}=\frac{309}{7\cdot 52}=y_M,$$

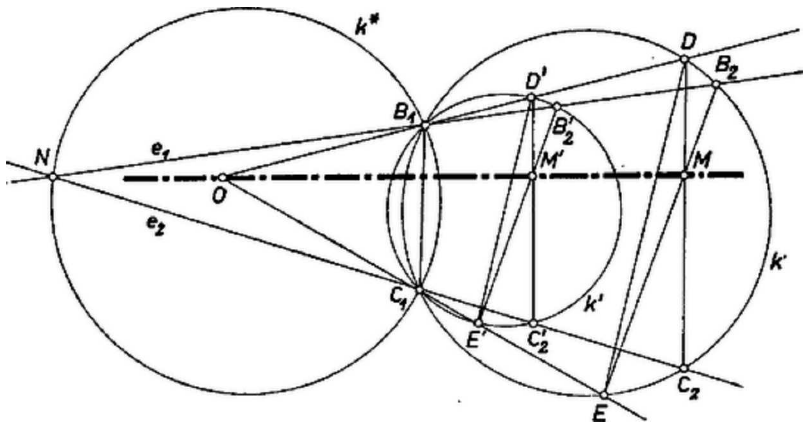
azt kaptuk tehát, hogy M valóban az ON egyenesen van, s így O és M összekötésével a keresett egyenest kapjuk.

Antal Magdolna (Budapest, Varga K. lg. III. o. t.)

Megjegyzés. Az 1-es és 2-es indexű pontok a szerkesztésben különböző szerepet kapnak. Ha tehát pl. C_1-et felcseréljük C_2-vel, egy más M_1-et kapunk. Hasonló számítás mutatja, hogy az így adódó OM_1 egyenes is azonos ON-nel, azonban lehetséges, hogy M_1 is kiesik a rajzlapról.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a leírt szerkesztés a sík bármely e_1, e_2 egyenespárjához és bármely O ponthoz meghatározza az ON egyenest, ahol N az e_1, e_2 egyenesek közös pontja. A bizonyításban a 2. ábrán bemutatott helyzetre szorítkozunk.

Hajtsuk végre a szerkesztést egy k körből kiindulva és a B_1, B_2, valamint C_1, C_2 pontpárban az indexek egy bizonyos megválasztása mellett, majd vegyünk k helyett egy a B_1, C_1 pontokon átmenő más k' kört, és legyenek az ebből adódó további pontok rendre B_2', C_2', D', E', M'. A B_1C_1ED és $B_1C_1E'D'$ húrnégyszögek B_1-nél, ill. C_1-nél levő szögei közösek, ezért E-nél és E'-nél, valamint D-nél és D'-nél levő szögeik páronként egyenlők, tehát $D'E'$ párhuzamos DE-vel.



2. ábra

Hasonlóan $E'B_2' \parallel EB_2$ és $D'C_2' \parallel DC_2$, így a $D'E'M'$ háromszög oldalai rendre párhuzamosak a DEM háromszög megfelelő oldalával, e két háromszög hasonló helyzetű. A hasonlósági középpont O, a DD' és EE' egyenesek metszéspontja, itt megy tehát át az MM' egyenes is, ennélfogva k' helyére bármely más a B_1, C_1 pontokon átmenő kört véve M' mindig az OM egyenesen adódik.

Az OM egyenes átmegy N-en, mert alkalmas kört véve N is kiadódik M' gyanánt: k helyére a B_1, C_1, N pontokon átmenő k^* kört véve B_2^* és C_2^* azonos N-nel, tehát ebben az esetben a $C_2^*D^*$ és $B_2^*E^*$ egyenesek metszéspontja N.

Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A II. megoldásban (legalábbis a pontoknak az ábrán látható elrendezése mellett) a következő tételt bizonyítottuk: *Ha A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 a kör 6 pontja, akkor a „szemben fekvő" A_1A_2 és A_4A_5, A_2A_3 és A_5A_6, A_3A_4 és A_6A_1 egyenespárok metszéspontjai egy egyenesen vannak.* (Esetünkben a 6 pont B_1, B_2, E, C_1, C_2, D, a metszéspontok N, M és O.) A tétel kör helyén tetszés szerinti kúpszeletre is érvényes, Pascal-tétel néven ismeretes.[1]

Hirka András (Pannonhalma, Benedek-rendi g. III. o. t.)

[1] Lásd pl. Tankönyvkiadó Vállalat (Budapest) következő Középiskolai Szakköri Füzeteiben: *Schopp János:* Kúpszeletek (1955) 71. o. és *Vigassy Lajos:* Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással (1957) 32. o.