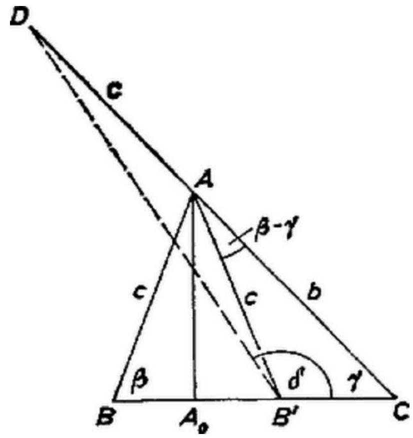
I. megoldás. Tegyük fel, hogy a szokásos jelöléseket használva az A csúcsból húzott magasság A_0 talppontja a BC oldal belsejébe esik, tehát $\beta < 90°$.



1. ábra

Legyen B-nek A_0-ra vett tükörképe B' (1. ábra). Ez az A_0C szakaszon van, mert $A_0B'A\sphericalangle = A_0BA\sphericalangle = \beta > \gamma = A_0CA\sphericalangle$. Az $AB'C$ háromszögben a $B'C$ oldal a vetületek különbsége, tehát 1 egység, az A csúcsnál levő szög β–γ, és az A-ban összefutó oldalak összege $AC + AB' = AC + AB = b + c$. Írjuk fel e háromszög $B'C$ oldalára a koszinusz–tételt. $c = 5 - b$ helyettesítéssel

$$1 = b^2 + (5-b)^2 - 2b(5-b)\cos 20°,$$

$$(1+\cos 20°)b^2 - 5(1+\cos 20°)b + 12 = 0,$$

(1) $$b = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{12}{1+\cos 20°}} \approx 2{,}5 + \sqrt{6{,}25 - 6{,}187} \approx$$

$$\approx 2{,}5 + \sqrt{0{,}063} \approx 2{,}5 + 0{,}251 = 2{,}751 \text{ egység, és így}$$

(2) $$c = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{12}{1+\cos 20°}} \approx 2{,}249 \text{ egység}$$

(a másik gyököt, ami az itt c-re nyert érték, mindjárt mellőztük, mert $b < c$-re vezet, ami $\beta > \gamma$ miatt lehetetlen).

Az a oldal egyenlő a szóban forgó vetületek összegével: $a = BA_0 + A_0C$. Ezért az AA_0 magasságnak az ABA_0 és ACA_0 derékszögű háromszögekből vett kifejezéseit egyenlővé téve rendezés után egyenletet kapunk a-ra:

$$AA_0^2 = AB^2 - BA_0^2 = AC^2 - A_0C^2,$$

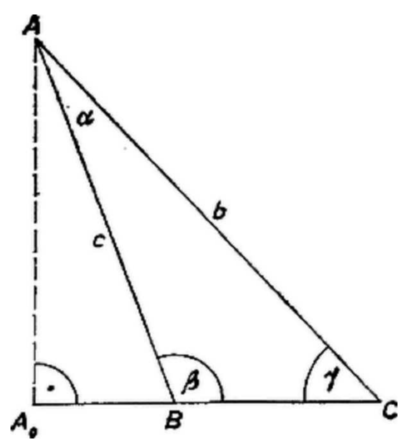
$$A_0C^2 - BA_0^2 = AC^2 - AB^2,$$

$$(BA_0 + A_0C)(A_0C - BA_0) = (AC + AB)(AC - AB),$$

tehát (1) és (2) figyelembevételével

$$a \cdot 1 = a = 5 \cdot 2\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{12}{1+\cos 20°}} \approx 2{,}51 \text{ egység.}$$

Mindezek szerint az oldalak: $a \approx 2{,}51$, $b \approx 2{,}751$, $c \approx 2{,}249$ egység.



2. ábra

Ha A_0 a BC oldal meghosszabbítására esik ($b > c$ miatt a B-n túlra, 2. ábra), akkor b és c vetületeinek a különbsége maga a $BC = a$ oldal, és ennek A-ból vett látószöge β–γ helyett α, ami $\beta \neq 90^\circ$ esetében különbözik tőle. Ebben az esetben előző számításaink így nem alkalmazhatók. Megmutatjuk azonban, hogy ez az eset nem lehetséges.

A kizárandó esetben, $\beta > 90^\circ$, $\gamma > 70^\circ$ volna, tehát $b > c > AA_0 = A_0C$ tg $\gamma > BC$ tg $\gamma =$ tg $\gamma >$ tg $70^\circ > 2{,}7$, és így $b + c > 2 \cdot 2{,}7 = 5{,}4$, ami lehetetlen, mert $b + c = 5$. Eszerint fenti feltevésünk helyes.

Rejtő Lídia (Budapest, Berzsenyi D. lg. III. o. t.)

Megjegyzés. A gyökjel alatti hányadost logaritmussal 4 értékes jegyre számítottuk ki, a különbségben azonban csak 2 értékes jegy maradt, ezért a négyzetgyökből 3-nál több értékes jegyet semmi esetre sem írhattunk ki. Közönséges osztással viszont a hányadosból 5 értékes jegyet írhatunk ki, mert az 1,9397 osztóban is 5 értékes jegy van, ezért a gyökjel alatt eggyel több jegyet kapunk:

$$\sqrt{6{,}25 - 6{,}1865} = \sqrt{0{,}0635} \approx 0{,}252;$$

így $b \approx 2{,}752$, $c \approx 2{,}248$, $a \approx 2{,}52$ egység.

II. megoldás. Felhasználjuk az I. megoldás második részéből, hogy $\beta < 90^\circ$. Forgassuk rá az AB oldalt AC-nek A-n túli meghosszabbítására: $AD = AB$, így $CD = b + c = 5$, és kössük össze D-t B'-vel (1. ábra). Az $AB'D$ egyenlő szárú háromszögben $ADB'\sphericalangle = (\beta - \gamma)/2 = 10^\circ$. Számítsuk ki a $CB'D = \delta$ szöget. A színusz–tétellel

$$\sin\delta = 5\sin 10^\circ,$$

másrészt $\delta > CB'A = 180^\circ - \beta > 90^\circ$, ezért $\delta = 119{,}78^\circ$, és így $B'CD\sphericalangle = \gamma = 50{,}22^\circ$, $\beta = 70{,}22^\circ$. Most már az $AB'C$ háromszögből kiszámíthatjuk b-t és c-t, majd az eredeti háromszögből a-t. Ezzel a számítással elkerültük a koszinusz–tétel felhasználását.

Treer Mária (Budapest, Kaffka M. lg. II. o. t.)

Több megoldás goniometriai összefüggésekben használta fel a β–γ különbséget. Egy ilyet vázol a

III. megoldás. Legyen a háromszög köré írt kör sugara R, így

$$b + c = 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma = 2R(\sin\beta + \sin\gamma) = 4R\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos 10^\circ = 5.$$

Másrészt a b', c' vetületek különbsége ($\beta < 90^\circ$ felhasználásával):

$$\begin{aligned} b' - c' = b\,\cos\gamma - c\,\cos\beta = 2R(\sin\beta\,\cos\gamma - \sin\gamma\,\cos\beta) = 2R\sin(\beta-\gamma) = \\ = 4R\,\sin 10^\circ\cos 10^\circ = 1. \end{aligned}$$

Ezekből

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 5\sin 10^\circ, \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 60{,}22^\circ$$

(mert hegyes szög). Tovább a II. megoldás szerint haladhatunk.

Kemenes János (Budapest, Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A II. és III. megoldás egybevetéséből adódó $(\beta + \gamma)/2 = 180^\circ - \delta$ összefüggést elemi úton is megkaphatjuk:

$$180^\circ - \delta = BB'D\sphericalangle = BB'A\sphericalangle - DB'A\sphericalangle = \beta - \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$