I. Jelöljük az a, b, c oldallal szemben fekvő csúcsot A-val, B-vel, ill. C-vel és a belőlük kiinduló súlyvonalat rendre s_a, s_b, s_c-vel.

Két különböző oldalhoz tartozó súlyvonal közül a nagyobbik oldalhoz tartozó a kisebb. Ha ugyanis pl. $a<b$, akkor a C csúcs és vele együtt az s_c súlyvonal is az AB szakasz felező merőlegesének ugyanazon az oldalán van, mint a B csúcs. Ez áll az S súlypontra is, tehát

$$\frac{2}{3}s_a=SA>SB=\frac{2}{3}s_b,\qquad s_a>s_b.$$

Így a feltevés szerint $s_a>s_b>s_c$, a súlyvonalak alkotta háromszög tehát csak úgy lehet hasonló az eredetihez, ha

$$a:b:c=s_c:s_b:s_a. \tag{1}$$

Ismeretesek[1] az oldalak és súlyvonalak közt a következő összefüggések:

$$4s_a^2=-a^2+2b^2+2c^2,\quad 4s_b^2=2a^2-b^2+2c^2,\quad 4s_c^2=2a^2+2b^2-c^2. \tag{2}$$

Az (1)-ből adódó $b:c=s_b:s_a$ aránypárt négyzetre emelve a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{s_b^2}{s_a^2}=\frac{4s_b^2}{4s_a^2}=\frac{2a^2-b^2+2c^2}{-a^2+2b^2+2c^2}.$$

A törteket eltávolítva és b hatványai szerint rendezve

$$2b^4+(3c^2-a^2)b^2-2c^2(c^2+a^2)=0.$$

Ez b^2-re vonatkozóan másodfokú egyenlet, aminek a diszkriminánsa

$$\left(3c^2-a^2\right)^2+16c^2(c^2+a^2)=25c^4+10a^2c^2+a^4=\left(5c^2+a^2\right)^2$$

s így – a b^2-re adódó megoldások közül csak a pozitívot véve –

$$b^2=\frac{a^2-3c^2+5c^2+a^2}{4}=\frac{a^2+c^2}{2}. \tag{3}$$

Ezzel a gyökkel (2) alapján

$$4s_a^2=3c^2,\qquad 4s_b^2=\frac{3}{2}(a^2+c^2)=3b^2,\qquad 4s_c^2=3a^2,$$

tehát ez esetben valóban fennáll (1). Egyszersmind azt is találtuk, hogy a súlyvonalakból képezett háromszög $\sqrt{3}/2$ arányú kicsinyítettje az eredetinek.

Most már (3) alapján $a=47$ és $b=65$-tel $c=79$, és ezek lehetnek egy háromszög oldalai.

II. A (3)-at és az $a<b<c$ feltételt teljesítő, legkisebb pozitív egész számhármas: $a=1$, $b=5$, $c=7$ – ugyanis b helyén 1, 2, 3, 4-gyel $2b^2$ nem bontható fel két különböző természetes szám négyezetének összegére –, ezek azonban nem lehetnek egy háromszög oldalai. További próbálgatással nyerjük elsőnek a 7, 13, 17 számhármast, amelyből már szerkeszthető háromszög.

Hirka András (Pannonhalma, Benedek–rendi g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A súlyvonalakra nyert nagyságviszonyok érvényben maradnak, ha a feltétel helyett $a\leqq b\leqq c$-ből indulunk ki. Mindkét nagyságviszonyban egyenlőséget véve (3) teljesül, de közvetlenül is belátjuk, hogy a szabályos háromszög súlyvonalaiból szerkesztett háromszög szabályos, és hogy az oldalak aránya $\sqrt{3}/2$.

2. A (3) egyenlőséget átrendezve

$$c^2-b^2=b^2-a^2,\qquad\text{vagy}\qquad\frac{c+b}{b+a}=\frac{b-a}{c-b}.$$

Ha a, b, c egész, akkor e törtek értéke racionális szám és 1-nél nagyobb, mert $c>a$, s így $c+b>b+a$. A tört legegyszerűbb alakjában a számlálót és nevezőt u, v-vel jelölve $u>v$ és u, v relatív prímek,

$$(c+b)v=(b+a)u,\qquad(b-a)v=(c-b)u.$$

A két egyenletből a-t, ill. c-t kiküszöbölve a maradó két oldal arányára

$$\frac{b}{c}=\frac{u^2+v^2}{u^2+2uv-v^2},\qquad\frac{b}{a}=\frac{u^2+v^2}{-u^2+2uv+v^2}$$

adódik. Így

$$a=2uv-u^2+v^2,\qquad b=u^2+v^2,\qquad c=2uv+u^2-v^2$$

egész megoldása a feladatnak és közös osztó nélküli egészek, ha u és v közül egyik páros, másik páratlan.

Berecz Ágota (Makó, József A. g. III. o. t.)

[1] Lásd pl. 752. gyakorlat, K. M. L. 25 (1962/11) 149.o.