I. megoldás. Tegyük az 1. sor egymás utáni mezőire a vörös háromszöget, a sárga négyzetet, a zöld ötszöget és a kék hatszöget – az 1. ábrán $v3$, $s4$, $z5$, $k6$; tovább is hasonló jelöléseket használunk. Az $s4$ alatti mezőre csak zöld, vagy kék színű és csak ötszög vagy hatszög alakú lemezt tehetünk, mert a mező a jobbra lejtő átlóba is beletartozik, és ha akár a sárga vagy vörös színt, akár a négyzet vagy háromszög alakot ismételnénk, az átlón vagy a 2. oszlopban nem léphetne fel minden szín és alak.

$v3$	$s4$	$z5$	$k6$
$k5$	$z6$	$s3$	$v4$
$s6$	$v5$	$k4$	$z3$
$z4$	$k3$	$v6$	$s5$

1. ábra

A szóba jövő $z5$, $z6$, $k5$, $k6$ lemezek közül kettőt már elhelyeztünk, válasszuk hát $z6$-ot. A jobbra lejtő átló további mezőire kék és sárga lemezt kell tennünk, ebben a sorrendben – nehogy a 4. oszlopon két kék lemez álljon –, éspedig a $k4$-et és $s5$-öt – így van az átlón négyszög és ötszög is, és nincs a 3. oszlopban két ötszög.

A bal alsó sarokmezőn már csak $z4$ felel meg, mert az oda befutó három vonalon a többi szín és alak már előfordult. A 2. oszlopban a 3. mezőre (a balra lejtő átlót is tekintetbe véve) vörös lemez kell, éspedig 3-as vagy 5-ös. A $v5$-öt kell tennünk, mert a $v3$-at már elhelyeztük. Alája a 2. oszlop miatt csak $k3$ tehető – és ez a 4. sornak is megfelel –, melléje a $v6$, ami a 3. oszlop számára elfogadható, végül ezt az oszlopot és a balra lejtő átlót egyaránt teljessé teszi a közös mezejükre tett $s3$.

Ugyanilyen meggondolásokkal (továbbra is mindig egyértelműen) adódik az 1. és 4. oszlop még üres mezőinek betöltése $k5$-tel és $s6$-tal, ill. $v4$-gyel és $z3$-mal. A kész elrendezés minden előírásnak megfelel.

Dobozy Ottó (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. ált. isk. VII. o. t.)

II. megoldás. Soronként, oszloponként és átlónként ugyanannyi mező van, mint ahány szín és alak, így minden szín és minden alak a mondott vonalakon csak úgy léphet fel, ha sem szín, sem alak nem ismétlődik. Színre és alakra ugyanaz a követelmény, ezért a két tulajdonság szerint külön–külön megfelelő összes elrendezéseket úgy kapjuk, ha a 16 mezőn minden lehető módon úgy helyezünk el pl. 4–4 egyező betűt, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átló mentén 4 különböző betű álljon, vagyis egyik vonalon se legyen ismétlődés.

Az 1. sor egymás utáni mezőire A-t, B-t, C-t és D-t írva a 2. sor B alatti mezején, amely az A-ból induló átlóba is beletartozik, sem B, sem A nem állhat, ezért vagy C-t, vagy D-t kell írnunk (a két lehetőséget a 2. és 3. ábra mutatja, az utóbbin kis betűket használunk).

Innen kezdve mindkét kitöltés egyértelmű. Ugyanis az A-ból induló átló folytatása a 3. és 4. oszlop miatt a 2. ábrán csak D, B lehet, a 3. ábrán pedig csak b, c. A 3. oszlop hátra levő két mezejére a 2. ábrán (felülről lefelé) B, A jut (a 4. sor miatt), a 3. ábrán a, d (a 2. sor miatt). A másik átló befejezése az oszlopok miatt (felülről lefelé) a 2. ábrán A, C lehet, a 3. ábrán c, b – és ezek a 3. és 4. sornak is megfelelnek –, majd a 2. oszlop 4. betűje D, ill. a. Egyértelműen adódik az 1. és a 4. oszlop befejezése is, figyelemmel a 2. és 3. sor már kitöltött mezőire. A kész ábrák, és csak ezek, felelnek meg a követelménynek.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	A
C	D	A	B

2. ábra

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

3. ábra

Aa	Bb	Cc	Dd
Dc	Cd	Ba	Ab
Bd	Ac	Db	Ca
Cb	Da	Ad	Bc

4. ábra

A feladat kettős követelménye akkor teljesül, ha ábráink közül egyet a színek, egyet az alakok elrendezésének tekintve és egymásra helyezve minden lemezünk helyét megkapjuk, más szóval egyik lemezünk helyzetére sem adódik két lehetőség. Egyik ábrát sem vehetjük mindkét tulajdonság elrendezése mintájának – esetleg más 4 betűvel, pl. a 2. ábrát X, Y, Z, V-vel ismételve –, mert így ugyanaz a betűpár, pl. AX, 4-szer szerepelne, AY, AZ, AV viszont egyszer sem. A 2. és 3. ábrák egymásra helyezése viszont eredményes (4. ábra), mert bármelyikük 4 egyező betűvel betöltött mezején a másikban 4 különböző betű áll.

Ha tehát a nagy betűk helyére a színeket, a kicsik helyére pedig az alakokat írjuk valamilyen sorrendben (egymástól persze függetlenül), mindig megoldást kapunk, valamint akkor is, ha a színeket a kicsi, a formákat a nagy betűk helyére írjuk.

Berendi Emma (Budapest, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Látható, hogy a 2. és 3. ábrák a négyzet forgatásaival és tükrözéseivel vagy önmagukba, vagy egymásba mennek át. Ennek így kell lennie, különben így új elrendezések állnának elő, ami lehetetlen. A mondott szimmetriákkal bármelyik betűnk négy mezeje átvihető bármelyik másik betű mezőnégyesébe, pl. az A mezők a b mezőkbe $+90°$-os forgatással.

2. Érdekes ábrákat kapunk, ha a színeknek és az alakoknak számértéket tulajdonítunk, éspedig valamilyen sorrendben a 0, 4, 8, 12, ill. az 1, 2, 3, 4 értékeket. Ha pl. $v = 0$, $s = 4$, $z = 8$ és $k = 12$, akkor lemezeink értékei sorra az 1–4, 5–8, 9–12 és 13–16 számokkal egyenlők. Másrészt az értékek összege minden előírt vonalon ugyanannyi,

mert az értékeknek a színekből adódó részei mindenütt $0+4+8+12=24$-et adnak, az alakokból eredő részek pedig $1+2+3+4=10$-et, összesen 34-et.

Egymás utáni természetes számok efféle, minden vonalon ugyanakkora összeget adó elrendezéseit *bűvös négyzet*eknek nevezik; ábránk ún. 4-ed rendű bűvös négyzet.

3. Az 1227. feladatban használt meggondolások mintájára a betűk helyére a színeket és az alakokat egyaránt $4\cdot 3\cdot 2=24$-féleképpen választhatjuk meg. Másrészt a 2. és 3. ábra mindegyikét vehetjük a színek ábrájának, így a 4. ábra $2\cdot 24^2=1152$ megoldást ad feladatunkra. Ugyanennyi különböző bűvös négyzetet is ad (a színek és alakok értékét rögzítjük). 4-edrendű bűvös négyzet azonban nemcsak így képezhető.

4. A 2–4. ábrák több más problémában is fellépnek, a sorok és oszlopok megegyező száma tetszés szerinti lehet. A 4. ábrát és más rendszámú megfelelőit *Euler–féle négyzet*eknek nevezik, pontosabban *átlós Euler–féle négyzet*-nek, ugyanis esetenként az átlók követelményétől eltekintünk. *L. Euler* híres matematikus (1707–83) kereste 6 különböző ezred 6–6 különböző rangú katonájának ilyen elrendezését 6 sorban és 6 oszlopban. Sejtését, hogy ez a probléma nem oldható meg, csak 1900-ban sikerült bebizonyítania *G. Tarry*-nak. A 2–3. ábrákat és megfelelőiket Euler *latin–négyzet*eknek nevezte.