Minthogy k pozitív, (1) így alakítható át:

$$p_k = \frac{k \log(\log x^k)}{k \log x} = \frac{\log(\log x^k)}{\log x}. \tag{3}$$

Képezzük a (2) összeg k-adik tagjának logaritmusát az (1)-ben használt a alapszámra, és írjuk be (3)-at:

$$\log x^{p_k} = p_k \log x = \log(\log x^k).$$

Csak egyenlő számok logaritmusa lehet egyenlő – természetesen ugyanazon alap mellett –, mert a szám növelésével logaritmusa is növekszik, ha az alap 1-nél nagyobb, és a szám növelésével logaritmusa csökken, ha az alap 0 és 1 közti szám. Így az előbbi egyenlőségből következik, hogy

$$x^{p_k} = \log x^k = k \log x. \tag{4}$$

Ezt $k = 1, 2, \ldots, n$-nel alkalmazva (2) bal oldala

$$(1 + 2 + \ldots + n) \log x = \frac{n(n+1)}{2} \log x = \frac{n}{2} \log x^{n+1} = \frac{n}{2} x^{p_{n+1}},$$

egyenlő a jobb oldallal, tehát az állítás helyes.

(1) nevezője létezik és 0-tól különböző, ha x az 1-től különböző pozitív szám. A számlálóban $\log x^k$-nak is pozitívnak kell lennie, de lehet 1-gyel egyenlő is, ennélfogva $\log x$ is csak pozitív szám lehet. Ha tehát $a > 1$, akkor (2) csak $x > 1$ esetén áll fenn, ha pedig $0 < a < 1$, akkor csak $0 < x < 1$ esetén.

Halmai László (Esztergom, Temesvári Pelbárt g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel.

Megjegyzés. A dolgozatok nem vizsgálják az előforduló kifejezések létezésének feltételeit.