I. megoldás. Helyettesítsük (2)-ből b^2-et (3)-ba, másrészt (3)-ból c^2-et (2)-be. Így megkapjuk előbb c^2 és a^2, másodszor b^2 és a^2 arányát:

$$c^2 = \frac{7}{9}\,a^2, \qquad \text{ill.} \tag{4}$$

$$b^2 = \frac{10}{9}\,a^2. \tag{5}$$

Ezekkel az oldalak aránya is meg van határozva, vagyis a háromszög alakja, szögei is, hacsak (4) és (5)-nek a még fel nem használt (1)-be való behelyettesítése nem vezet ellentmondásra. (4) és (5)-tel (1) teljesül, eszerint a három egyenlet bármelyike következik a másik kettőből, egyikük megadása felesleges volt.

(4) és (5)-ből $b^2 = 10\,k^2$, $a^2 = 9\,k^2$, $c^2 = 7\,k^2$ – ahol k pozitív arányossági tényező –, így $b > a > c$ és $\beta > \alpha > \gamma$. Másrészt $b^2 = 10k^2 < a^2 + c^2 = 16k^2$, így a háromszög hegyesszögű, a szögek tangensei pozitívok és $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\gamma$. Az állítás csak úgy teljesülhet, ha $\operatorname{tg}\alpha$ egyenlő a másik két szög tangensének számtani közepével.

Húzzuk meg az a oldalhoz tartozó m magasságot, és legyen c-nek a-ra való vetülete x. A keletkezett két derékszögű háromszögből

$$m^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2, \qquad x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = k,$$
$$m^2 = 6k^2, \qquad m = \sqrt{6}k, \qquad \operatorname{tg}\beta = \sqrt{6}, \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{6},$$

Ezekkel pedig

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = -\frac{\sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}}{1 - \dfrac{6}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4},$$

valóban egyenlő $\operatorname{tg}\beta$ és $\operatorname{tg}\gamma$ összegének felével.

Lukács Lídia (Püspökladány, Karacs F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyenek egy háromszög oldalai d, e, f, szemben levő szögei δ, ε, φ. Keressük meg, mely feltételnek kell teljesülnie az oldalakra, hogy fennálljon

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varphi}{2}. \tag{6}$$

A követelményből az addíció–tétel alkalmazásával

$$\operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg}(\varepsilon+\varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\varphi - 1} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varphi}{2}.$$

A számlálók egyenlőségéből következik a nevezők egyenlősége is, abból pedig

$$\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\varphi = 3. \tag{7}$$

(Ugyanis a számlálók közös értéke valódi háromszögben nem lehet 0, különben $\operatorname{tg}\varepsilon = -\operatorname{tg}\varphi$-ből $\varepsilon+\varphi = 180^\circ$ adódnék.)

(7) szerint $\operatorname{tg}\varepsilon$ és $\operatorname{tg}\varphi$ pozitívok – mert nem lehet ε és φ mindegyike tompaszög –, így $\operatorname{tg}\delta$ is pozitív, a háromszög hegyesszögű. Nem állhat $e = f$, mert ez $\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, $\varepsilon = \varphi = 60^\circ = \delta$-ra és $d = e = f$-re vezet, ami (1)–(3) szerint esetünkben lehetetlen. Válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $e > f$. Ekkor $\varepsilon > \varphi$, $\operatorname{tg}\varepsilon > \operatorname{tg}\varphi$, és mivel (6) szerint $\operatorname{tg}\delta$ közéjük esik, $\varepsilon > \delta > \varphi$ és $e > d > f$.

Fejezzük ki (7) bal oldalát az oldalakkal és a t területtel:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \frac{2df\sin\varepsilon}{d^2+f^2-e^2} = \frac{4t}{d^2+f^2-e^2}.$$

$\operatorname{tg}\varphi$ hasonló kifejezésével, majd $16t^2$ helyére a Heron–képlet alapján az oldalak kifejezését helyettesítve, beszorzással és rendezéssel

$$16t^2 = 3(d^2+f^2-e^2)(d^2+e^2-f^2),$$
$$2d^2e^2 + 2d^2f^2 + 2e^2f^2 - d^4 - e^4 - f^4 = 3d^4 - 3(e^2-f^2)^2,$$
$$2d^4 - (e^2+f^2)d^2 - (e^2-f^2)^2 = 0. \tag{8}$$

Ez a (6) teljesülésének szükséges feltétele; másrészt valódi háromszögben elegendő is, mert számításaink megfordíthatóak.

Vonjuk le (1) $2a^2$-szereséből (2) b^2-szeresét és (3) c^2-szeresét:

$$2a^4-b^4-c^4=a^2b^2+a^2c^2-2b^2c^2,$$

ami átrendezhető

$$2a^4-a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2=0$$

alakba. Ez (8)-ból d, e, f helyett a, b, c-t helyettesítve keletkezik, tehát háromszögünknek megvan a (6) tulajdonsága.

Strommer Richárd (Budapest, Piarista g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy minden a (6) feltételt teljesítő háromszögben a súlypontot a körülírt kör középpontjával összekötő egyenes (a háromszög ún. *Euler*–féle egyenese) párhuzamos a d oldallal. Ugyanis ennek a tulajdonságnak is (7) a feltétele.