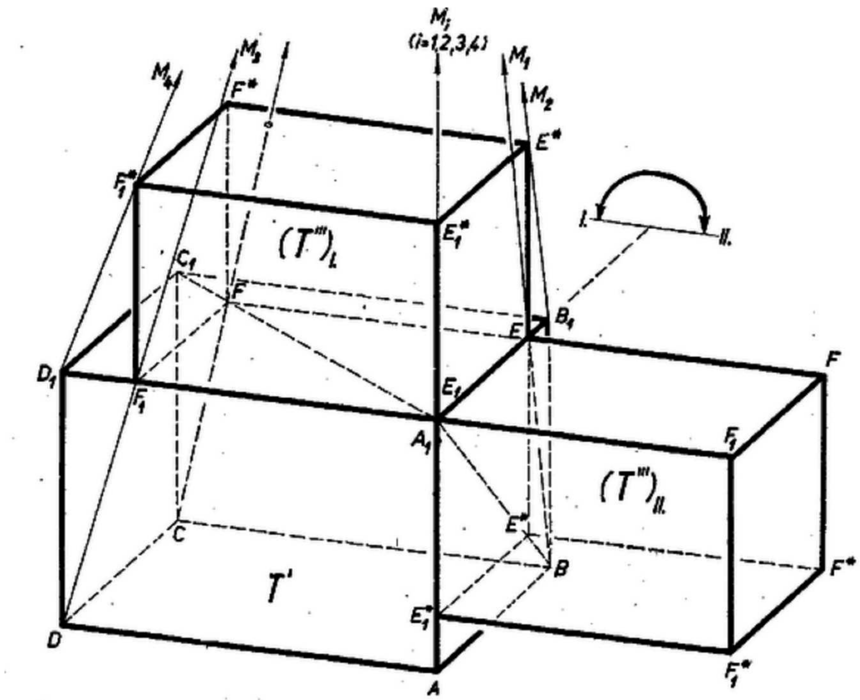
I. megoldás. A kívánt összeillesztés kétféleképpen lehetséges:

I. E_1^* az AA_1 szakasz A_1-en túli meghosszabbításán van, vagy

II. az AA_1 szakaszra kerül E_1^*. A két helyzet egymásból A_1E mint tengely körüli 180°-os elforgatással áll elő.



Az $ABCD$, E_1EFF_1, $A_1B_1C_1D_1$ és $E_1^*E^*F^*F_1^*$ lapok mindkét helyzetben párhuzamosak (beleértve azt is, hogy esetleg egy síkban vannak), mégpedig úgy, hogy a megfelelő éleik is párhuzamosak (tehát pl. $AB \parallel E_1E \parallel A_1B_1 \parallel E_1^*E^*$).) A feladatban szereplő egyenesek – beleértve az $AA_1 \equiv AE_1 \equiv A_1E_1^*$ egyenest is – az első és második, ill. a harmadik és negyedik téglalap megfelelő csúcsainak összekötő egyenesei. Ha ezek egy M ponton mennének keresztül, az azt jelentené, hogy a két paralelogrammapár hasonló helyzetű lenne az M pontra, mint hasonlósági középpontra nézve, s így hasonlók lennének. Azonban a megfelelő oldalpárok aránya:

$$\frac{AB}{E_1E} = \frac{A_1B_1}{E_1^*E^*} = \frac{126}{100} = \frac{63}{50} \quad \text{és} \quad \frac{AD}{E_1F_1} = \frac{A_1D_1}{E_1^*F_1^*} = \frac{159}{126} = \frac{53}{42},$$

különböző, nem egyszerűsíthető törtekkel fejezhető ki, s így nem egyenlő. (Különbségük $53/42 - 63/50 = 1/525 \neq 0$.) Így nem mehetnek át a szóban forgó egyenesek egy ponton, sőt már a BE, CF, DF_1 sem metszheti ugyanabban a pontban AA_1 ($\equiv AE_1$)-et, sem a B_1E^*, C_1F^* és $D_1F_1^*$ egyenesek.

Raisz Miklós (Miskolc, Földes F. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A tagadó választ természetesen könnyű annak megmutatásával megadni, hogy két egyenes különböző pontokban metszi AA_1-et. Kiszámíthatjuk pl. alkalmas hasonló háromszögpárokból a BE_1, B_1E^*, DF_1, $D_1F_1^*$ egyenesek AA_1-gyel való M_1, M_2, M_3, M_4 metszéspontjának távolságát A_1-től, és kiderül, hogy mind a négy metszéspont különböző (bár az I. helyzetben igen közel esnek egymáshoz).

2. Nem nehéz belátni, hogy ha a téglalapok nem hasonlók, akkor nem is metszheti mindegyik egyenes AA_1-et. Viszont elég már egy AA_1-et nem metsző egyenest megadni a tagadó válaszhoz, mint az alábbi megoldásban történik.

II. megoldás. A feladat kérdésére a válasz tagadó, ugyanis a CF egyenes nem is metszi AA_1-et (és a C_1F^* sem). A CF egyenes vetülete az $A_1B_1C_1$ síkra a C_1F egyenes, a síkra merőleges AA_1 egyenesé pedig az A_1 pont. Ha CF és AA_1 metszenék egymást, ekkor C_1F átmenne A_1-en. Ez az I. megoldásban leírt II. helyzetben nyilván lehetetlen, mert A_1 a 90°-os EFF_1 szögtartomány belsejében van, viszont a C_1 pont és vele együtt a C_1F egyenes is azon kívül.

Az I. helyzetben, ha C_1F átmenne A_1-en, akkor az $A_1C_1D_1$ és A_1FF_1 háromszögek hasonlóak volnának. Azonban megfelelő oldalpárjaik arányára

$$\frac{A_1D_1}{A_1F_1} = \frac{159}{126} > \frac{C_1D_1}{FF_1} = \frac{126}{100},$$

tehát a kérdéses metszéspont most sem létezik.

(Mivel a C_1F^* vetülete az $A_1B_1C_1$ síkra ugyancsak a C_1F egyenes, így az sem metszheti AA_1-et.)

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az a tény, hogy az $AD : E_1F_1 = 159 : 126 = 1{,}261\ldots$, $AB : E_1E = 126 : 100 = 1{,}26$ és $AA_1 : EE^* = 100 : 79{,}5 = 1{,}257\ldots$ arányok értéke közelítőleg egyenlő (3 értékes jegyre kerekítve 1,26), azt jelenti, hogy az

$$AD, \quad EF = AB, \quad E_1E = AA_1 = \frac{AE}{2} \quad \text{és} \quad EE^* = \frac{AD}{2}$$

szakaszok mértékszámai közelítőleg egyenlők egy mértani sorozat négy egymás utáni tagjával. E sorozat hányadosát q-val jelölve a negyedik tagra egyrészt közelítőleg $EE^* \approx AD \cdot q^3$, másrészt pontosan $EE^* = \frac{AD}{2}$. Az arányok akkor volnának egyenlők, ha

$$q^3 = \frac{1}{2}, \qquad q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}7937\ldots$$

volna, ekkor

$$\frac{1}{q} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots, \qquad \frac{1}{q^2} = \sqrt[3]{4} = 2q = 1{,}587\ldots$$

Eszerint a fenti M_1, M_2, M_3, M_4 pontok az I. helyzetben azért esnek egymáshoz közel, mert az eredeti test élméretei a $100\sqrt[3]{2}$, $100\sqrt[3]{4}$, $200 = 100\sqrt[3]{8}$ értékek egészre kerekített értékei, ezért a felezéssel nyert T' jó közelítéssel hasonló az eredeti testhez, ugyanígy T''' a $T'' = T'$-höz.

A feladat a szabványos rajzpapírméretek között közelítően fennálló hasonlóság térbeli megfelelője. Az $A/0$ jelű, 1189×841 mm méretű (1 m^2 területű) papírból a hosszabb oldal felébe hajtásával előálló 841×594 mm méretű téglalap jó közelítéssel hasonló az eredetihez (területe 0,5 m^2; jele $A/1$). További ilyen felezésekkel állnak elő az $A/2$, $A/3$, $A/4$, $A/5$ jelű, 594×420, 420×297, 297×210, 210×149 mm méretű szabványos papírméretek, és jó közelítéssel a sorozat összes tagjai hasonlók, hosszuk közelítőleg $\sqrt{2}$-szerese a szélességüknek, és a szélességük $\sqrt{2}$-szer akkora, mint a hosszúságuk fele.