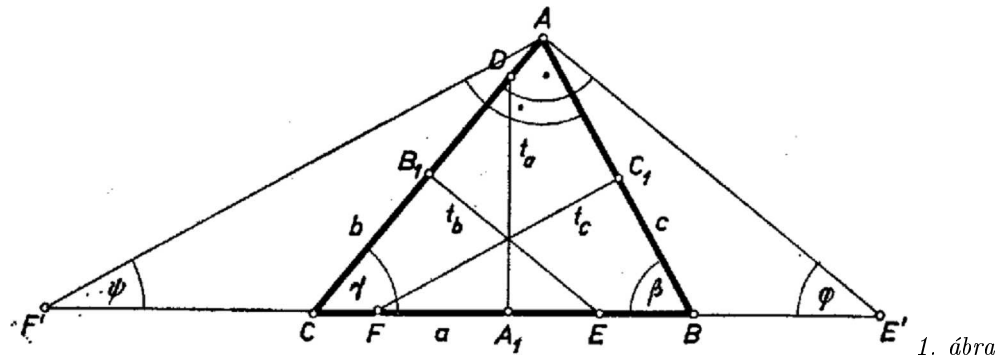


I. megoldás. Jelöljük az a, b, c hosszúságú oldalakkal szemközti csúcsokat A, B, C -vel, az ezeknél fekvő szögeket α, β, γ -val, az oldalak felező pontjait A_1, B_1, C_1 -gyel, a t_a, t_b, t_c szakaszok másik végpontját D, E, F -fel. A közelebb van B -hez, mint C -hez (mert $c < b$), ezért BC felező merőlegesének arra az oldalára esik, mint B , tehát a felező merőleges az AC szakaszt metszi, vagyis D az AC oldalon van. Hasonlóan $a = BC > AC = b$ és $a = BC > BA = c$ következtében E és F az a hosszúságú BC oldalon van.

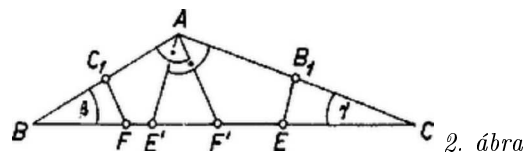


A $t_a = A_1D$ és $t_b = B_1E$ szakaszok az A_1CD és B_1CE derékszögű háromszögek közös γ szögével szemben levő befogók. A két háromszög hasonló, és mivel a γ szög melletti befogókra

$$CA_1 = a/2 > b/2 = CB_1,$$

így a másik befogó párra $t_a > t_b$ áll fenn.

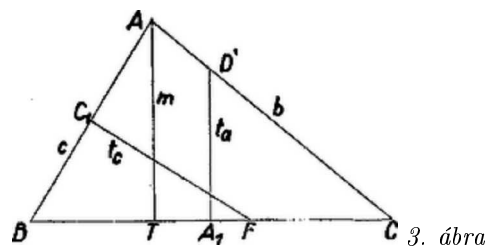
Húzzunk t_b és t_c összehasonlítására A -ból párhuzamosot ezekkel, messék a párhuzamosok a BC egyenest az E' ill. F' pontban. Ekkor B_1E az ACE' háromszög középvonala, C_1F az ABF' -é, így $AE' = 2B_1E = 2t_b$, $AF' = 2C_1F = 2t_c$. Megmutatjuk, hogy az $AE'F'$ háromszögben E' -nél nagyobb szög van, mint F' -nél. Ebből már következik, hogy $2t_c = AF' > AE' = 2t_b$, $t_c > t_b$, vagyis a feladat állításában szereplő második egyenlőtlenség.



Az ACE' és ABF' derékszögű háromszögekből

$$\varphi = \angle AE'C = 90^\circ - \gamma, \quad \psi = \angle AF'B = 90^\circ - \beta,$$

mivel továbbá $a > b > c$ -ből következik, hogy β, γ hegyesszögek és $\beta > \gamma$, így $\varphi > \psi$. A szakaszokra vonatkozó egyenlőtlenség tehát igazolást nyer, ha belátjuk, hogy az $AE'F'$ háromszög E' -nél és F' -nél levő szögei φ és ψ (és egyik esetben sem a 180° -ra kiegészítő szög). Ehhez meg kell még mutatnunk, hogy E' -től C és F' egy irányban van, F' -től pedig B és E' . Hegyesszögű háromszög esetében ez világos, mert E' a BC oldal B -n túli meghosszabbítására esik, F' pedig az oldal C -n túli meghosszabbítására. Ha BAC tompaszög, akkor AE' ennek a szögtartománynak a belsejében halad, AB -vel hegyesszöget zár be, így az AB -re merőleges AF' a CAE' szögtartomány belsejében halad, tehát a BC egyenessel való F' metszéspontja E' és C közé esik. Ezzel az egyenlőtlenségek bizonyítását befejeztük.



Húzzuk meg a háromszög A -ból induló $AT = m$ magasságát. Mivel a a háromszög legnagyobb oldala, T az oldal belső pontja. A keletkező ACT háromszög hasonló DCA_1 -hez, az ABT háromszög pedig FBC_1 -hez, mivel a háromszögek derékszögűek és C -nél, ill. B -nél közös szögük van.

Alkalmazva Pythagorász tételét az ABT és ACT háromszögekre

$$c^2 = m^2 + BT^2, \quad b^2 = m^2 + CT^2,$$

a két egyenlet különbségét képezve

$$b^2 - c^2 = CT^2 - BT^2 = (CT + BT)(CT - BT) = a(CT - BT).$$

Az ACT és DCA_1 háromszög hasonlóságából

$$CT = \frac{AT}{A_1D}CA_1 = \frac{m}{t_a} \cdot \frac{a}{2}, \quad \text{és} \quad CT - BT = 2CT - a = \frac{m}{t_a}a - a,$$

így

$$(1) \quad b^2 - c^2 = a \left(\frac{ma}{t_a} - a \right).$$

Hasonlóan az ABT és FBC_1 háromszögek hasonlóságából

$$BT = \frac{AT}{FC_1}BC_1 = \frac{m}{t_c} \cdot \frac{c}{2}, \quad \text{és} \quad CT - BT = a - 2BT = a - \frac{mc}{t_c},$$

így

$$(2) \quad b^2 - c^2 = a \left(a - \frac{mc}{t_c} \right).$$

Ha fennáll, $t_a = t_c$, akkor

$$a = CT + TB = \frac{ma}{2t_a} + \frac{mc}{2t_c} = \frac{m}{2t_a}(a + c),$$

és így

$$\frac{m}{t_a} = \frac{2a}{a + c}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve

$$(3) \quad b^2 - c^2 = a \left(\frac{2a^2}{a + c} - a \right) = \frac{a^2(a - c)}{a + c},$$

vagy a törtet eltávolítva és 0-ra redukálva

$$(4) \quad a^3 - a^2c - a(b^2 - c^2) - c(b^2 - c^2) = 0.$$

Ha van olyan háromszög adott b és c ($b > c > 0$) mellett, amelyben két oldal b és c hosszúságú, a harmadik hossza ezeknél nagyobb, és $t_a = t_c$, akkor van olyan a érték b és $b + c$ közt, amelyre (4) teljesül.

Megfordítva: ha teljesül (4) egy b és $b + c$ közötti a értékre, akkor egyrészt $a + c > 0$, és így teljesül (3) is.

Másrészt minden háromszögre teljesül (1) és (2). Ezek és (3) összehasonlításából egyrészt

$$\frac{ma}{t_a} - a = \frac{2a^2}{a + c} - a, \quad \frac{m}{t_a} = \frac{2a}{a + c},$$

másrészt

$$a - \frac{mc}{t_c} = \frac{a(a - c)}{a + c}, \quad \frac{m}{t_c} = \frac{1}{c} \left[a - \frac{a(a - c)}{a + c} \right] = \frac{2a}{a + c},$$

tehát $t_a = t_c$.

Azt kell tehát belátnunk, hogy az

$$f(x) = x^3 - x^2c - x(b^2 - c^2) - c(b^2 - c^2)$$

polinomnak van b és $b + c$ közé eső gyöke.

Írjunk az egyenlet bal oldalán x helyére előbb b -t, majd $b + c$ -t:

$$f(b) = -2b^2c + bc^2 + c^3 = -c(b - c)(2b + c) < 0,$$

$$f(b + c) = 2c^2(b + c) > 0,$$

ellentett előjelűek. Ezek szerint adott pozitív b, c értékek és $b > c$ esetén van olyan a szám, amelyre

$$b < a < b + c,$$

másrészt $f(a) = 0$. Így az a, b, c oldalak háromszöget adnak, és abban $t_a = t_b$, mert a végzett számítás visszafordítható.

Az egyenlőtlenségek bizonyítása *Dobó Ferenc* (Budapest, I. István g. IV. o. t.) dolgozatából.

II. megoldás. A szögek fenti jelöléseivel a megfelelő derékszögű háromszögekből

$$(5) \quad t_a = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad t_b = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad t_c = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Így az $a/2 > b/2$ egyenlőtlenséget a pozitív $\operatorname{tg} \gamma$ -val szorozva $t_a > t_b$.

Másrészt $\gamma < \beta < 90^\circ$ miatt $\cos \gamma > \cos \beta > 0$, és

$$0 < \frac{1}{\cos \gamma} < \frac{1}{\cos \beta}.$$

Ezt a szinusz tételből adódó, pozitív tagokból álló

$$\frac{b \sin \gamma}{2} = \frac{c \sin \beta}{2}$$

egyenlőséggel szorozva $t_b < t_c$ adódik.

A $t_a = t_c$ követelményből a szögfüggvényeket az oldalakkal kifejezve egyenletet kapunk a -ra.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{2ab \sin \gamma}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{4t}{a^2 + b^2 - c^2} \quad \text{és}$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4t}{a^2 + c^2 - b^2},$$

ezért behelyettesítéssel és a szokásos rendezési lépésekkel:

$$\frac{a}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{c}{a^2 + c^2 - b^2},$$
$$a^3 - ca^2 - (b^2 - c^2)a - (b^2 - c^2)c = 0.$$

(A nevezők egyike sem 0, mert csak a b és c -nél nagyobb a értékekre szorítkozunk.) Ezzel ismét az I. megoldás (4) egyenletére jutottunk.

Az egyenlőtlenségek bizonyítása *Csirík János* (Orosháza, Tánicsics M. g. III. o. t.) dolgozatából.

Megjegyzés. A dolgozatok a $t_a = t_c$ követelményből az (5) kifejezésekkel és a szinusz-tétel alkalmazásával levezették az

$$(6) \quad a = b \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$$

összefüggést, és ebből következtettek egy a -nál nagyobb b létezésére, a $\cos \gamma > \cos \beta (> 0)$ egyenlőtlenség felhasználásával. Ez nem helyes, mert burkoltan felhasználták a bizonyítandó állítást. γ -ról és β -ról csak akkor beszélhetünk, ha már tudjuk, hogy létezik olyan a , amely b -vel és c -vel együtt háromszöget alkot és abban $t_a = t_c$. Még világosabban: b , β és $\gamma (< \beta)$ megadásával a háromszög már meg van határozva, és nem biztos, hogy teljesül (6).