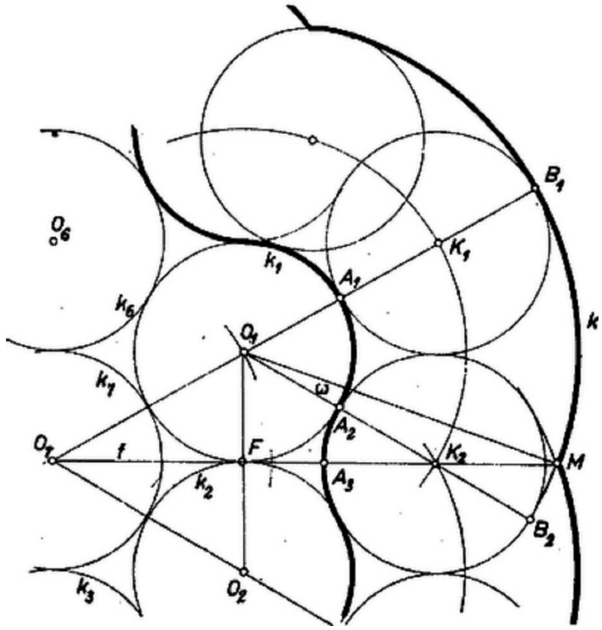
A 731. gyakorlatban[1] 7 db r sugarú körlemez középpontjai egy $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsaiba és középpontjába voltak rögzítve – így a k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 körök érintették két–két szomszédjukat és a középső k_7-et – egy nyolcadik, ugyancsak r sugarú k_8 körlemez pedig egyszer körülgördült az első 6 kör körül.



A 7 körből álló rendszer szimmetrikus a középső kör O_7 középpontját a többi középponttal összekötő egyenesekre, továbbá az első 6 kör közül 2–2 érintkezőnek a közös belső érintőjére, ami szintén átmegy O_7-en (pl. a k_1 és k_2 kör F érintkezési pontjában húzott O_7F érintő egyenesére). Ezekre szimmetrikus lesz a k_8 által súrolt idom is.

A mozgás egy szakaszában k_8 csak k_1-gyel érintkezik, eközben K középpontja a k_1-nek O_1 középpontja körüli $2r$ sugarú kör egy ívét írja le, így k_8 annak a körgyűrűnek a területéből súrol egy részt, melynek belső határoló köre k_1, a külső pedig az O_1 körül $3r$ sugárral írt k. A leírt szimmetriák következtében elég meghatározni a súrolt T területnek az O_7O_1 és az O_7M félegyenesek közti részét, ahol M a k-nak O_7F-fel való, O_7-től távolabbi metszéspontja; T ennek a 12-szerese.

Legyen a gördülő k_8 kör K középpontjának helyzete az O_7O_1 egyenesen K_1, k_8 ezen helyzetének az O_7O_1-en fekvő átmérője A_1B_1, másrészt K helyzete O_7M-en K_2, az O_1K_2-n levő átmérő A_2B_2, és az O_7K_2-n levő átmérőnek O_7-hez közelebbi végpontja A_3. Így a körívekkel és egyenesszakaszokkal határolt $A_1A_2A_3MB_1$ idom területét akarjuk meghatározni. Ezt a $G = A_1A_2B_2B_1$ körgyűrű–cikkből úgy kapjuk, hogy hozzávesszük a $C = K_2A_2A_3$ körcikket, másrészt elhagyjuk a K_2M és K_2B_2 egyenesszakaszokkal és a B_2M körívvel határolt D idomot.

A G körgyűrű–cikk középponti szöge 60°, így területe $4r^2\pi/3$, a C körcikké $r^2\pi/12$, mert $A_2K_2A_3\sphericalangle = 30^\circ$, a két terület összege $17r^2\pi/12$. A D idom az O_1B_2M körcikkből az O_1K_2M háromszög elhagyásával keletkezik. Az utóbbi területe egyenlő O_1FM és O_1FK_2 derékszögű háromszögek területének különbségével, ami

$$\frac{O_1F}{2}\,(FM - FK_2) = \frac{r^2}{2}\,(\sqrt{8} - \sqrt{3}),$$

mert

$$FM = \sqrt{O_1M^2 - O_1F^2} = r\sqrt{8}, \qquad FK_2 = \sqrt{O_1K_2^2 - O_1F^2} = r\sqrt{3}.$$

A körcikk B_2O_1M középponti szögének radiánban vett mértékszámát ω-val jelölve D területe:

$$\frac{9r^2\omega}{2} - \frac{r^2}{2}\,(\sqrt{8} - \sqrt{3}) = \frac{r^2}{2}\,(9\omega - \sqrt{8} + \sqrt{3}),$$

másrészt az O_1FM derékszögű háromszögből

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \omega = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}1837.$$

Ezekkel

$$T = 12\left[\frac{17r^2\pi}{12} - \frac{r^2}{2}\,(9\omega - \sqrt{8} + \sqrt{3})\right] = r^2\,(17\pi - 54\omega + 12\sqrt{2} - 6\sqrt{3}).$$

[1] K. M. L. 25 (1962/10) 53. o.

A numerikus kiszámításban vegyük figyelembe, hogy ω hibája a visszakeresés, átszámítás és a kerekítések folytán elérheti az $1 \cdot 10^{-4}$-et, így a zárójel második tagjának hibája a $6 \cdot 10^{-3}$-t. Emiatt a zárójel tagjait 3 tizedesre számítjuk és végül 2 tizedesre kerekítünk: $T \approx 50{,}07\ r^2$.

Minárik László (Tamási, Béri Balogh Á. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Több jó gondolatmenetű dolgozat numerikus eredménye meglehetősen pontatlan a kisebb részletekben végrehajtott számítás és a többszöri kerekítés miatt.