Az x-et és a p-t tartalmazó tagokat egyelőre egy zárójelbe foglalva az egyenlet így írható:

$$\frac{2(x-p)+q}{2(x-p)-q}=\frac{2q+(x+p)}{2q-(x+p)}.$$

Ezt a két nevező szorzatával szorozva – feltéve természetesen, hogy a szorzat nem 0 – két–két tag kiesik:

$$2q^2-2(x^2-p^2)=-2q^2+2(x^2-p^2),\quad x^2=p^2+q^2.$$

A szorzással gyököt nem veszthettünk el, ennélfogva az egyenletet csak az

(2) $$x_1=\sqrt{p^2+q^2},\qquad x_2=-\sqrt{p^2+q^2}$$

számok elégíthetik ki, vagy pedig az egyenletnek nincs megoldása.

A feladat követelménye csak a következő két módon teljesülhet:

I. x_1 és x_2 nem különbözők: $x_1=x_2=0$, és ez kielégíti az egyenletet. Azonban a (2) kifejezések csak a $p=q=0$ értékpárral válhatnak 0-vá (csak valós p, q számokat veszünk figyelembe), viszont $x=p=q=0$-val az adott egyenlet mindkét oldala értelmetlen. Ez a mód nem vezet célba.

II. x_1 és x_2 egyike megoldás, másika nem, mert mellette az egyenletnek nincs értelme.

a) A bal oldali tört értelmetlenné válik, ha

$$x^*=p+\frac{q}{2},$$

keressünk tehát olyan p, q értékpárt, amelyre x_1 és x_2 egyike egyenlő x^*-gal:

$$\pm\sqrt{p^2+q^2}=p+\frac{q}{2}.$$

Innen a szokásos lépésekkel

$$q^2=pq+\frac{q^2}{4},\qquad q\left(p-\frac{3q}{4}\right)=0,\qquad \text{tehát}$$

a_1) aleset: vagy $q=0$, és p bármely szám – kivéve az I-ben már kizárt $p=0$ értéket –,

a_2) aleset: vagy $p=3q/4$, továbbá ismét $q\neq 0$.

Az *a_1)* alesetben (2) így alakul: $x_1=p$ – ez éppen a kizárt x^* érték –, másrészt $x_2=-p$, ennek kellene lennie az egyetlen gyöknek. Azonban $x_2=-p$-vel (1) jobb oldala értelmetlen, itt tehát nem kapunk megfelelő p, q számpárt.

Az *a_2)* alesetben $x^2=25q^2/16$, viszont a kizárt érték $x^*=5q/4$, ennélfogva az egyetlen megoldás csak a következő érték lehet:

(3) $$x=-\frac{5q}{4}.$$

Ezzel (1) bal és jobb oldala

$$\frac{-\frac{5q}{2}-\frac{3q}{2}+q}{-\frac{5q}{2}-\frac{3q}{2}-q}=\frac{3}{5},\qquad \text{ill.}\qquad \frac{2q+\frac{3q}{4}-\frac{5q}{4}}{2q-\frac{3q}{4}+\frac{5q}{4}}=\frac{3}{5},$$

tehát (3) valóban megoldás.

b) Hasonlóan (1) jobb oldala értelmetlenné válik, ha

$$x^{**}=2q-p.$$

Az $x_{1,2}=x^{**}$ követelés $q(3q-4p)=0$-ra vezet, vagyis az *a)* eset feltételeire, így nem kapunk új megfelelő p, q számpárt.

Ezek szerint a feladat követelménye azokra és csak azokra a p, q értékpárokra teljesül, amelyekre $p:q=3:4$ és $q\neq 0$. Ezen értékpárokra az egyenlet egyetlen megoldása $x=-5q/4$, másképpen $x=-5p/3$.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)