Megoldásunkat az exponenciális függvény tankönyvbeli grafikonjának szemléletére alapítjuk. A grafikon – ha az a alap nagyobb 1-nél – balról jobbra emelkedő folytonos vonal, nincs „vízszintes” szakasza sem, vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $a^{x_1} < a^{x_2}$, továbbá bármely az X-tengely „fölött”, vele párhuzamosan haladó egyenes átmetszi a görbét (az előbbiek szerint pontosan egy pontban), vagyis minden $y > 0$ számhoz van olyan x, amelyre $a^x = y$ (az y szám a alapú logaritmusa). Bizonyítás nélkül felhasználjuk még azt, hogy az adott egyenlet bal oldalán álló összeg grafikonjának is megvannak ugyanezek a tulajdonságai.

Az $x = 0$, 1, 2 helyeken a bal oldal értéke rendre 2, 16, 136, a jobb oldalé pedig 1, 13, 169. Eszerint az $x = 1$ abszcisszán még a bal oldal grafikonja lép át magasabban, az $x = 2$ abszcisszán pedig már a jobb oldalé. Így a két grafikon metszéspontja, amelynek abszcisszája a keresett gyök, mert ordinátája a két oldal közös értéke, az $x = 1$ és $x = 2$ egyenesek között van.

A közbeeső $x = 3/2$ helyen a táblázat szerint, 2 tizedesre kerekítve egyrészt

$$6^{3/2} + 10^{3/2} = \sqrt{216} + \sqrt{1000} \approx 14{,}70 + 31{,}62 = 46{,}32,$$

másrészt $13^{3/2} = 13\sqrt{13} \approx 46{,}87$, nagyobb a bal oldalnál, tehát a gyök 1 és $3/2 = 1{,}5$ között van.

Tovább logaritmussal számolunk. Egyszerűség kedvéért mindjárt a jobb és a bal oldal

$$f(x) = 13^x - 6^x - 10^x$$

különbségét számítjuk ki, és ennek elsősorban az előjelét tekintjük, később az abszolút értékét is. Ha a különbség negatív, akkor a következő lépésben nagyobb x-szel próbálkozunk, pozitív különbség esetén kisebbel. Másrészt a két ellentett jelű különbséget adó x érték közül ahhoz választjuk közelebb a következő próbálkozás x-ét, amelyre a különbség abszolút értéke kisebb. $x = 1{,}5$-re a különbség $+0{,}55$ körül van, $x = 1$-re pedig -3. Az utóbbi sokszorosan nagyobb abszolút értékű, ezért valószínű, hogy x közelebb áll 1,5-höz, mint 1-hez. Próbálkozzunk ezért $x = 1{,}4$-del:

$$f(1{,}4) = 13^{1{,}4} - 6^{1{,}4} \approx 10^{1{,}4} \approx 36{,}27 - 12{,}29 - 25{,}12 = -1{,}14,$$

ezért x az $(1{,}4;\, 1{,}5)$ intervallumban van, közelebb 1,5-höz, mert

$$|+0{,}55| < |-1{,}14|.$$

Hasonlóan $x = 1{,}47$-dal

$$\begin{array}{llll}
f\ (1{,}47) & \approx 43{,}39 - 13{,}93 - 29{,}51 = -0{,}05, & \text{tehát} & x > 1{,}47, \\
f\ (1{,}48) & \approx 44{,}52 - 14{,}18 - 30{,}20 = +0{,}14, & \text{tehát} & x < 1{,}48, \\
f\ (1{,}472) & \approx 43{,}62 - 13{,}98 - 29{,}65 = -0{,}01, & \text{végül} & \\
f\ (1{,}473) & \approx 43{,}73 - 14{,}01 - 29{,}71 = +0{,}01. & &
\end{array}$$

Tekintettel arra, hogy a logaritmus visszakeresésekben a századrészeket interpolálással kapjuk, sőt az alapok logaritmusának x-szereseit is kerekítettük, az eredményt tovább nem finomíthatjuk, így az adott egyenlet megoldása ezredrészre kerekítve $x = 1{,}472$, vagy 1,473.

Gálfi István (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. III. o. t.)

Megjegyzés. Valamivel egyszerűbb a számítás, ha az egyenletet 10^x-szel osztva

$$1{,}3^x - 0{,}6^x - 1 = 0$$

alakban írjuk.

Horváth Sándor (Szeged, Radnóti M. g. II. o. t.)